KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Lutz Weis
M.Sc. Fabian Hornung

WS 2016/2017
20. Januar 2017

Evolutionsgleichungen
12. Übungsblatt

Aufgabe 29 (Nichtlineare Wärmeleitungsgleichung I)

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$(1)\qquad \begin{cases} \partial_t u(t,x) = \Delta u(t,x) + f(u(t,x)) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^d,\ t \geq 0, \\ u(0,x) = u_0(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

wobei $f \in C^1((a,b),\mathbb{R})$ für $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

Dazu definieren wir

$$X := \left\{ u \in C(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}) \colon \ell(u) := \lim_{|x|\to\infty} u(x) \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und}$$
$$U := \left\{ v \in X \colon \inf_{x\in\mathbb{R}^d} v(x) > a,\ \sup_{x\in\mathbb{R}^d} v(x) < b \right\} \subset X.$$

Sei $\overline{\Delta}$ der Abschluss von Δ auf $D(\Delta) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ in $C_0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ (vergleiche Definition des Abschlusses von Operatoren in Aufgabe 25) sowie

$$\Delta_\ell u := \overline{\Delta}(u - \ell(u)) \quad \text{für } u \in D(\Delta_\ell) := \left\{ u \in X \colon u - \ell(u) \in D(\overline{\Delta}) \right\}.$$

Dann ist Δ_ℓ der Erzeuger der Kontraktionshalbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ auf X, die gegeben ist durch $T(0) = I$ und

$$(T(t)u)(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u(y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}^d, t > 0.$$

Setzen wir schließlich noch $F\colon X \to X$, $F(u) = f \circ u$, so lässt sich (1) umschreiben zu der folgenden nichtlinearen Evolutionsgleichung auf X:

$$(2)\qquad \begin{cases} u'(t) = \Delta_\ell u(t) + F(u(t)), \quad t \geq 0, \\ u(0) = u_0 \in X. \end{cases}$$

a) Vergewissern Sie sich, dass $(X, \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum ist.

b) Zeigen Sie, dass für jedes $u_0 \in U$ ein $\tau \in (0,\infty]$ sowie eine integrierte Lösung $u \in C([0,\tau), X)$ von (2) existiert.

c) Zeigen Sie: Sind v und w integrierte Lösungen von (2) mit $v(0) \leq w(0)$ und ist $f' \geq 0$, so gilt $v(t) \leq w(t)$ für $0 \leq t < \tau$.

— please turn over —

Aufgabe 30 (Nichtlineare Wärmeleitungsgleichung II)

Im Setting von Aufgabe 21 sei $u_0 \in U$ und $u \in C([0,\tau), X)$ die integrierte Lösung von (2). Dann definieren wir

$$h(t) := \ell(u(t)).$$

a) Zeigen Sie, dass h auf $[0,\tau)$ differenzierbar ist mit

$$h'(t) = f(h(t)) \quad \text{für } t \in [0,\tau).$$

b) Zeigen Sie: Ist $u_0 \in U$ eine konstante Funktion, so gilt $u(t,x) = h(t)$.

c) Sei nun $a = -\infty$, $b = 1$ und $f(u) = \frac{1}{1-u}$. Folgern Sie

$$\frac{(1 - \|u_0\|_\infty)^2}{2} \leq \tau \leq \frac{(1 - h(0))^2}{2}.$$

Hinweis zu c). Verwenden Sie die Differentialgleichung aus a) für die obere Abschätzung. Für die andere Richtung ist die Lösung zum Anfangswert $v_0 = \|u_0\|_\infty$ nützlich.

Aufgabe 31 (Maximale Existenzzeiten)

Verwenden Sie Aufgabe 30 a), um obere Schranken für die Existenzzeiten der folgenden nichtlinearen Wärmeleitungsgleichungen anzugeben:

a)

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) &= \Delta_\ell u(t,x) + e^{u(x,t)} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^d,\ t \geq 0, \\ u(0,x) &= u_0(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^d, \end{aligned}$$

wobei $u_0 \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ mit $\ell(u_0) \in \mathbb{R}$.

b)

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) &= \Delta_\ell u(t,x) + u(x,t)^2 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^d,\ t \geq 0, \\ u(0,x) &= u_0(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^d, \end{aligned}$$

wobei $u_0 \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ mit $\ell(u_0) > 0$.