KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2016/2017
Institut für Analysis 27. Januar 2017
Prof. Dr. Lutz Weis
M.Sc. Fabian Hornung

Evolutionsgleichungen
13. Übungsblatt

Aufgabe 32 (Nichtlineare Schrödinger-Gleichung)

Wir betrachten

$$(1) \qquad \begin{cases} iu'(t) = \Delta u(t) + \lambda |u(t)|^2 u(t), \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

für $\lambda \in \{-1, 1\}$.

a) Sei $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie, dass $T > 0$ existiert, sodass die Gleichung (1) eine eindeutig bestimmte milde Lösung $u \in C([-T,T], H^2(\mathbb{R}^3))$ besitzt.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $H^2(\mathbb{R}^3)$ eine Algebra ist, d.h. $f, g \in H^2(\mathbb{R}^3)$ impliziert $fg \in H^2(\mathbb{R}^3)$.

b) Begründen Sie, warum die allgemeine Theorie der Vorlesung nicht verwendet werden kann, um lokale Wohlgestelltheit von (1) in $L^2(\mathbb{R}^3)$ zu zeigen.

Aufgabe 33 (Einbettung gebrochener Definitionsbereiche)

Seien X, Y Banachräume und $-A$ der Erzeuger einer C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ in X mit

$$\|T(t)\| \leq Me^{-at} \quad \text{für } t \geq 0,$$

wobei $a > 0$ und $M \geq 1$. Sei $B : D(B) \subset X \to Y$ ein abgeschlossener Operator mit $D(A) \subset D(B)$. Existieren $\beta \in [0,1)$ und $c > 0$ mit

$$\|Bx\|_Y \leq c\|Ax\|_X^{\beta} \|x\|_X^{1-\beta},$$

so folgt $D(A^\alpha) \subset D(B)$ und $BA^{-\alpha} \in B(X,Y)$ für $\alpha > \beta$.

Hinweis: Schreiben Sie

$$x = \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\gamma} R(\lambda, -A) A^\gamma x \, \mathrm{d}\lambda$$

für $\gamma \in (\beta, 1)$ mit $\gamma \leq \alpha$, um eine Abschätzung für $\|Bx\|_Y$ herzuleiten.

Aufgabe 34 (Nichtlineare Wärmeleitungsgleichung III)

Sei $X = L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p < \infty$, und Δ der Laplace-Operator mit Definitionsbereich $D(\Delta) = W^{2,p}(\mathbb{R}^d)$. Sei $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ für $p \neq 2$ und $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$ für $p = 2$. Außerdem setzen wir $X^\alpha := D\left((1-\Delta)^\alpha\right)$.

a) Zeigen Sie die Einbettung $X^\alpha \hookrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$.
Hinweis: Verwenden Sie im Fall $p \neq 2$ Aufgabe 33.

b) Wir betrachten

$$\begin{cases} u'(t) = \Delta u(t) + F(u(t)), \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2}$$

in wobei die Nichtlinearität $F : W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ der Bedingung

$$\|F(u_1) - F(v_1)\|_{L^p} \le C(R)\|u_1 - u_2\|_{W^{1,p}}$$

für $u_1, u_2 \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ mit $\|u\|_{W^{1,p}} \le R$ genügt. Sei $u_0 \in X^\alpha$. Zeigen Sie, dass die Gleichung (2) in X^α lokal wohlgestellt ist.

c) Sei nun $F_1(u) := |\nabla u|u$ und $F_2(u) = |u|^2 u$. Zeigen Sie, dass (2) in beiden Fällen für $p > d$ in X^α, $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$, lokal wohlgestellt ist.