KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2016/2017
Institut für Analysis 3. Februar 2017
Prof. Dr. Lutz Weis
M.Sc. Fabian Hornung

Evolutionsgleichungen
14. Übungsblatt

Notationen und Grundlagen:

Für $d \in \mathbb{N}$ definieren wir $\Omega := (-\pi, \pi)^d$ und

$$H = H_0(\Omega)^d, \qquad H_0(\Omega) := \left\{ f \in L^2(\Omega) : \int_\Omega f \mathrm{d}x = 0 \right\}.$$

Als Skalarprodukt auf dem Hilbertraum H wählen wir

$$(u, v)_H := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_\Omega u \cdot \overline{v} \mathrm{d}x, \quad u, v \in H.$$

Die Funktionen $h_k(x) := e^{ik\cdot x}$, $x \in \Omega$, bilden eine ONB von $H_0(\Omega)$ und jedes $u \in H$ hat eine Entwicklung in die Fourierreihe

$$u = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} l_k(u) h_k.$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$l_k(u) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_\Omega u(x) e^{-ik\cdot x} \mathrm{d}x, \qquad k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}.$$

Wir definieren die Operatoren

$$\operatorname{div} u = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} ik \cdot l_k(u) h_k, \qquad u \in D(\operatorname{div}) := \left\{ u \in H : \sum_{k \neq 0} |k \cdot l_k(u)|^2 < \infty \right\},$$

$$\nabla p = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} ik l_k(p) h_k, \qquad p \in D(\nabla) := \left\{ p \in H_0(\Omega) : \sum_{k \neq 0} |k l_k(p)|^2 < \infty \right\},$$

$$\Delta u = -\sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} |k|^2 l_k(u) h_k, \qquad u \in D(\Delta) := \left\{ u \in H : \sum_{k \neq 0} |k|^4 |l_k(u)|^2 < \infty \right\}$$

und die Teilräume

$$H_\sigma := \{ u \in H : k \cdot l_k(u) = 0 \quad \forall k \neq 0 \},$$
$$H_\nabla := \{ u \in H : \exists p \in D(\nabla) : u = \nabla p \}.$$

Außerdem setzen wir

$$Pv := \sum_{k \neq 0} (l_k(v) - p_k(v) k) h_k, \qquad v \in H.$$

mit $p_k(v) := \frac{k \cdot l_k(v)}{|k|^2}$ für $k \neq 0$.

— please turn over —

Aufgabe 35 (Helmholtz-Zerlegung)

a) Zeigen Sie, dass die Definitionen von div, ∇ und Δ für hinreichend glatte periodische Funktionen mit den klassischen Definitionen übereinstimmen.

b) Zeigen Sie, dass P eine Orthogonalprojektion in H definiert, deren Bild durch H_σ gegeben ist. Folgern Sie $H = H_\sigma \oplus^\perp H_\nabla$.

c) Wir definieren den Stokes-Operator

$$Au := -P\Delta u, \qquad u \in D(A) := D(\Delta) \cap H_\sigma.$$

Zeigen Sie $Au = -\Delta u$ für $u \in D(A)$ und dass A ein selbstadjungierter Operator in H_σ mit $\sigma(A) \subset [1, \infty)$ ist.

Aufgabe 36 (Navier-Stokes-Gleichung)

Wir betrachten die Gleichung

$$(1) \qquad \begin{cases} \partial_t u(x,t) = \Delta u(x,t) - (u(x,t) \cdot \nabla)\, u(x,t) - \nabla p(x,t), \\ \operatorname{div} u(x,t) = 0, \\ u(x + 2\pi e_i, t) = u(x,t), \\ u(x,0) = u_0(x), \\ \displaystyle\int_\Omega u(x,t) \mathrm{d}x = 0 \end{cases}$$

für $x \in \mathbb{R}^d$, $t \geq 0$ und $i = 1, \dots, d$, die die Geschwindigkeit u und den Druck p einer Flüssigkeit beschreibt. Dabei ist

$$(u \cdot \nabla)\, u := \sum_{j=1}^{d} u_j \partial_j u, \qquad u : \Omega \to \mathbb{R}^d.$$

a) Verwenden Sie die Helmholtz-Projektion P, um (1) in die Evolutionsgleichung

$$(2) \qquad \begin{cases} u'(t) = -Au(t) - P\,(u \cdot \nabla)\, u, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

in H_σ umzuformulieren. Wie kann man daraus p bestimmen?

b) Sei $\alpha > \frac{1}{2}$ im Fall $d = 2$ und $\alpha > \frac{3}{4}$ für $d = 3$. Zeigen Sie, dass die Abschätzung

$$\|\,(u \cdot \nabla)\, v\|_H \leq C_\alpha \|u\|_\alpha \|v\|_\alpha, \qquad u, v \in D(A^\alpha)$$

erfüllt ist.

c) Zeigen Sie, dass (2) für $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ im Fall $d = 2$ und für $\alpha \in (\frac{3}{4}, 1)$ im Fall $d = 3$ in $D(A^\alpha)$ lokal wohlgestellt ist.