KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2016/2017
Institut für Analysis 28. Oktober 2016
Prof. Dr. Lutz Weis
M.Sc. Fabian Hornung

Evolutionsgleichungen
2. Übungsblatt

Aufgabe 3 (Multiplikationshalbgruppen)

Gegeben sei eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ sowie der Banachraum

$$C_0(\Omega) := \big\{ f \in C(\Omega) \colon \forall\, \varepsilon > 0\, \exists \text{ kompakte Menge } K_\varepsilon \subset \Omega \text{ sodass } |f(s)| \le \varepsilon\, \forall s \in \Omega \setminus K_\varepsilon \big\}$$

versehen mit der Supremumsnorm. Sei $q\colon \Omega \to \mathbb{C}$ stetig. Dann definieren wir die Multiplikationshalbgruppe $(M_q(t))_{t\ge 0}$ durch $(M_q(t)f)(s) = e^{tq(s)}f(s)$ für $f \in C_0(\Omega)$, $s \in \Omega$ und $t \ge 0$. Zeigen Sie:

a) Für $t \ge 0$ ist die Abbildung $M_q(t)$ genau dann beschränkt auf $C_0(\Omega)$ falls $\operatorname{Re} q \le c$.

b) Für $\operatorname{Re} q \le c$ ist $(M_q(t))_{t\ge 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf $C_0(\Omega)$.

Unter der Bedingung $\operatorname{Re} q \le c$ bestimme man nun den Erzeuger von $(M_q(t))_{t\ge 0}$ sowie dessen Spektrum.

Aufgabe 4 (Satz von Hille-Yosida)

a) Auf $X := C[0,1]$ sei der lineare Operator A gegeben durch

$$Af = f' \qquad \text{für } f \in D(A) := \{u \in C^1[0,1] \colon u'(1) = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass A der Erzeuger einer C_0-Halbgruppe ist mit $\sigma(A) = \{0\}$.

b) Zeigen Sie, dass der Operator A aus *a)* kein Erzeuger einer C_0-Halbgruppe auf X ist, wenn man seinen Definitionsbereich durch

$$D(A) := \{u \in C^1[0,1] \colon u(1) = 0\}$$

ersetzt.

c) Auf $X := C_0(\mathbb{R}) \times C_0(\mathbb{R})$ versehen mit der Norm

$$\|(f,g)\| = \max\big\{\|f\|_\infty, \|g\|_\infty\big\}$$

betrachten wir den Operator

$$A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(s) = \begin{pmatrix} m(s) & m(s) \\ 0 & m(s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m(s)u(s) + m(s)v(s) \\ m(s)v(s) \end{pmatrix}$$

für $(u,v) \in D(A) = \big\{(f,g) \in X \colon (mf, mg) \in X\big\}$, wobei $m(s) = is$. Zeigen Sie, dass A kein Erzeuger einer C_0-Halbgruppe ist.