KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2016/2017
Institut für Analysis 04. November 2016
Prof. Dr. Lutz Weis
M.Sc. Fabian Hornung

Evolutionsgleichungen
3. Übungsblatt

Aufgabe 5 (Einschränkung von C_0-Halbgruppen)

a) Seien X, Y Banachräume mit $Y \hookrightarrow X$ und A der Erzeuger einer C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ auf X. Es gelte $T(t)Y \subset Y$ für $t \geq 0$ und $T(\cdot)y \in C(\mathbb{R}_+, Y)$ für alle $y \in Y$. Definiere

$$T_Y(t)y := T(t)y, \qquad t \geq 0, \quad y \in Y.$$

Zeigen Sie, dass $(T_Y(t))_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf Y ist und berechnen Sie den Erzeuger.

b) Sei $1 \leq p < \infty$. Zeigen Sie, dass die Einschränkung der Translationshalbgruppe aus Aufgabe 2 eine C_0-Halbgruppe auf $W^{1,p}(\mathbb{R})$ definiert.

Aufgabe 6 (Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten)

a) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, $1 \leq p < \infty$ und $a : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar. Wir definieren

$$T(t)f(\omega) := e^{ta(\omega)}f(\omega), \qquad \omega \in \Omega, \quad f \in L^p(\Omega).$$

Zeigen Sie:

i) Für $t \geq 0$ definiert $T(t)$ genau dann einen beschränkten Operator auf $L^p(\Omega)$, wenn $\operatorname{esssup}_{\omega\in\Omega} \operatorname{Re} a(\omega) < \infty$.

ii) Im Fall $\operatorname{esssup}_{\omega\in\Omega} \operatorname{Re} a(\omega) < \infty$ ist $(T(t))_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf $L^p(\Omega)$

Berechnen Sie den Erzeuger von $(T(t))_{t\geq 0}$.

b) Seien X und E Banachräume, A der Erzeuger einer C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ auf X und $J : X \to E$ ein Banachraum-Isomorphismus. Zeigen Sie, dass $(S(t))_{t\geq 0}$ mit

$$S(t) = JT(t)J^{-1}, \qquad t \geq 0,$$

eine C_0-Halbgruppe auf E ist und berechnen Sie den Erzeuger.

c) Seien $m, d \in \mathbb{N}$. Sei $(a_\alpha)_{|\alpha|\leq m} \subset \mathbb{C}$ und $a(\xi) := \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha (i\xi)^\alpha$, $\xi \in \mathbb{R}^d$ mit $\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d} \operatorname{Re} a(\xi) < \infty$. In $L^2(\mathbb{R}^d)$ definieren wir den Multiplikationsoperator M_a durch

$$M_a f = a \cdot f \qquad \text{für } f \in D(M_a) = \left\{f \in L^2(\mathbb{R}^d) \colon a \cdot f \in L^2(\mathbb{R}^d)\right\}.$$

Darüber hinaus sei der Operator A in $L^2(\mathbb{R}^d)$ definiert durch

$$Af := \mathcal{F}^{-1} M_a \mathcal{F} f \qquad \text{für } f \in \mathcal{F}^{-1} D(M_a).$$

— please turn over —

Zeigen Sie, dass A eine C_0-Halbgruppe erzeugt und dass

$$H^m(\mathbb{R}^d) \subset D(A), \qquad Af = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha D^\alpha f, \quad f \in H^m(\mathbb{R}^d),$$

erfüllt ist.

Aufgabe 7 (Erzeuger im Hilbertraum)

Sei H ein Hilbertraum und A ein positiver, selbstadjungierter Operator. Zeigen Sie unter Verwendung von Aufgabe 6 und des Spektralsatzes für selbstadjungierte Operatoren:

a) Der Operator iA erzeugt eine unitäre C_0-Gruppe.

b) Wenn A zusätzlich positiv ist, erzeugt $-A$ eine C_0-Halbgruppe.