KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Lutz Weis
M.Sc. Fabian Hornung

WS 2016/2017
11. November 2016

Evolutionsgleichungen
4. Übungsblatt

Aufgabe 8 (Dissipative Operatoren)

Zeigen Sie die Dissipativität folgender Operatoren auf X:

a) $A_1 f = qf$ für $f \in D(A_1) = \{f \in X : qf \in X\}$ auf $X := C_0(\mathbb{R}^d)$, wobei $q \in C(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{Re} q \leq 0$;

b) $A_2 f = Bf - \|c\|_\infty f$ für $f \in D(B) = D(A_2) = \{f \in C^1(\mathbb{R}) : f, f' \in C_0(\mathbb{R})\}$ auf $X := C_0(\mathbb{R})$, wobei $Bf = bf' + cf$ für beschränkte und reellwertige $b, c \in C(\mathbb{R})$;

c) $A_3 f = f'$ für $f \in D(A_3) = \{f \in C^1(0,1) : f(1) = 0\}$ auf $X := L^2(0,1)$.

d) $A_4 f = \Delta f$ für $f \in D(A_4) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ auf $X := C_0(\mathbb{R}^d)$.

Aufgabe 9 (Satz von Lumer-Phillips und Satz von Stone)

a) In $X := C[0,1]$ sei der Operator A definiert durch

$$Af = f'' \qquad \text{für } f \in D(A) = \big\{g \in C^2[0,1] : g'(0) = g'(1) = 0\big\}.$$

Zeigen Sie, dass A eine Kontraktionshalbgruppe auf X erzeugt.

b) In $X := L^2(0,1)$ betrachten wir die Operatoren

$$A_1 f = f' \qquad \text{für } f \in D(A_1) = \big\{g \in H^1(0,1) : g(1) = 0\big\}.$$

sowie

$$A_2 f = f' \qquad \text{für } f \in D(A_2) = \big\{g \in H^1(0,1) : g(0) = 0, g(1) = 1\big\}.$$

Welche der beiden Operatoren erzeugen eine Kontraktionshalbgruppe auf X?

c) In $X := L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ sei der Operator A definiert durch

$$A(f,g) = (g', f') \qquad \text{für } (f,g) \in D(A) = H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R}).$$

Zeigen Sie, dass A eine unitäre Gruppe auf X erzeugt.