

## Evolutionsgleichungen

### 6. Übungsblatt

#### Aufgabe 13 (Kontraktive analytische Halbgruppen)

- a) Sei  $X$  ein Hilbertraum und  $A: D(A) \subset X \rightarrow X$  linear und dissipativ. Weiter seien  $\lambda_0 > 0$  und  $\vartheta \in (0, \frac{\pi}{2})$  sodass  $\lambda_0 I - A$  surjektiv und  $e^{\pm i\vartheta} A$  dissipativ sind. Zeigen Sie, dass  $A$  eine beschränkte analytische Halbgruppe erzeugt mit

$$\|T(z)\| \leq 1 \quad \text{für } z \in \overline{\Sigma_\vartheta}.$$

- b) Sei  $(X, (\cdot, \cdot))$  ein Hilbertraum und  $A: D(A) \subset X \rightarrow X$  linear. Zeigen Sie, dass  $A$  genau dann eine kontraktive analytische Halbgruppe vom Winkel  $\delta \in (0, \frac{\pi}{2}]$  erzeugt, wenn  $\Sigma_{\frac{\pi}{2}+\delta} \setminus \{0\} \subset \rho(A)$  und

$$(Ax, x) \in \left(\mathbb{C} \setminus \Sigma_{\frac{\pi}{2}+\delta}\right) \cup \{0\} \quad \text{für alle } x \in D(A).$$

#### Aufgabe 14 („Unbeschränkte“ analytische Halbgruppen)

Sei  $X$  ein Banachraum und  $A: D(A) \subset X \rightarrow X$  linear. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- (1)  $A$  erzeugt eine analytische Halbgruppe  $(T(z))_{z \in \Sigma_\delta}$  mit

$$\|T(z)\| \leq M e^{\omega \operatorname{Re} z}, \quad z \in \overline{\Sigma_{\delta'}}, \delta' < \delta,$$

für ein  $M \geq 1$  und  $\omega \in \mathbb{R}$ ;

- (2)  $A$  ist dicht definiert,  $\omega + \Sigma_{\frac{\pi}{2}+\delta} \setminus \{0\} \subset \rho(A)$  und

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{K_\varepsilon}{|\lambda - \omega|} \quad \text{für alle } \lambda \in \omega + \Sigma_{\frac{\pi}{2}+\delta-\varepsilon} \setminus \{0\}, \varepsilon > 0.$$

Bestimmen Sie in diesem Fall eine explizite Darstellung von  $(T(z))_{z \in \Sigma_\delta}$ .

#### Aufgabe 15 (Erzeuger von Gruppen und analytischen Halbgruppen)

Sei  $A$  der Erzeuger einer beschränkten  $C_0$ -Gruppe  $(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$ . Dann erzeugt  $A^2$  eine beschränkte analytische Halbgruppe vom Winkel  $\frac{\pi}{2}$ .