

## Evolutionsgleichungen

### 5. Übungsblatt

#### Aufgabe 10 (Erzeuger analytischer Halbgruppen)

- a) In  $X := C[0, 1]$  sei der Operator  $A$  definiert durch

$$Au = u'' \quad \text{für } u \in D(A) = \{v \in C^2[0, 1] : v'(0) = v'(1) = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass  $A$  der Erzeuger einer beschränkten analytischen Halbgruppe in  $X$  ist.

- b) In  $X := C[0, 1]$  definieren wir den Operator  $A$  durch

$$Af = -f' \quad \text{für } f \in D(A) = \{g \in C^1[0, 1] : g'(0) = g(1)\}.$$

Finden Sie eine Darstellung der Resolvente von  $A$ . Erzeugt  $A$  eine beschränkte analytische Halbgruppe in  $X$ ?

#### Aufgabe 11 (Wesentlicher Definitionsbereich)

Sei  $A$  der Erzeuger einer analytischen Halbgruppe  $(T(z))_{z \in \Sigma_\delta}$  auf einem Banachraum  $X$ . Zeigen Sie, dass

$$D := \bigcup_{z \in \Sigma_\delta} \text{Bild}(T(z))$$

ein wesentlicher Definitionsbereich von  $A$  ist.

#### Aufgabe 12 (Lumer-Phillips für reflexive Banachräume)

Sei  $X$  ein reflexiver Banachraum und  $A: D(A) \subset X \rightarrow X$  dissipativ auf  $X$  sowie  $\lambda I - A$  surjektiv für ein  $\lambda > 0$ . Zeigen Sie, dass  $A$  dicht definiert ist und eine Kontraktionshalbgruppe erzeugt.

**Hinweis:** Zeigen Sie, dass die durch  $x_n := nR(n, A)x$  für  $x \in X$  und  $n \in \mathbb{N}$  definierte Folge beschränkt ist und dass der schwache Grenzwert von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  durch  $x$  gegeben ist.