KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Lutz Weis
M.Sc. Fabian Hornung

WS 2016/2017
02. Dezember 2016

Evolutionsgleichungen
7. Übungsblatt

Ankündigung

Am Freitag, den 09. Dezember 2016, werden die Termine von Vorlesung und Übung getauscht.

Aufgabe 16 (Normierung von C_0-Halbgruppen)

a) Sei $(T(t))_{t\geq 0}$ eine beschränkte C_0-Halbgruppe auf einem Banachraum $(X, \|\cdot\|)$. Zeigen Sie, dass durch

$$|||x||| := \sup_{t\geq 0} \|T(t)x\|, \qquad x \in X,$$

eine äquivalente Norm definiert wird.

b) Sei $(T(t))_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf einem Banachraum $(X, \|\cdot\|)$ sowie $M > 0$ und $\omega \in \mathbb{R}$ mit $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ für $t \geq 0$. Zeigen Sie, dass eine äquivalente Norm $|||\cdot|||$ auf X existiert mit $|||T(t)||| \leq e^{\omega t}$ für $t \geq 0$.

Aufgabe 17 (Dyson-Phillips Reihe)

Sei X ein Banachraum, A der Erzeuger einer C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ und $B \in B(X)$. Nach Vorlesung erzeugt dann $C := A+B$ eine C_0-Halbgruppe $(S(t))_{t\geq 0}$ mit $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$ für $t \geq 0$. Das Ziel der Aufgabe besteht darin, eine Darstellung für die Halbgruppe zu finden. Zeigen Sie dazu:

a) Für alle $x \in X$ hat die Gleichung

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)Bu(s)\,\mathrm{d}s, \qquad t \geq 0,$$

eine eindeutig bestimmte stetige Lösung, die durch $u(t) = S(t)x$ für $t \geq 0$ gegeben ist.

Hinweis: Betrachten Sie $f(s) := T(t-s)S(s)x$. Für die Eindeutigkeit ist das Gronwall-Lemma hilfreich.

b) Definiert man

$$S_0(t) := T(t), \quad S_n(t)x := \int_0^t T(t-s)BS_{n-1}(s)x\,\mathrm{d}s, \quad x \in X,\, n \in \mathbb{N},$$

so ist $(S_n(t))_{t\geq 0} \subset B(X)$ stark stetig und es gilt

$$\|S_n(t)\| \leq \frac{M^{n+1}\|B\|^n}{n!} t^n e^{\omega t}, \qquad t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

— please turn over —

c) Es gilt

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(t), \qquad t \geq 0,$$

mit gleichmäßiger Konvergenz der Reihe in $B(X)$ auf kompakten Intervallen $J \subset [0, \infty)$.

Aufgabe 18 (Rotation in $\mathbb{R}^2$)

In $X = \mathbb{R}^2$ betrachten wir das Anfangswertproblem

$$(*) \qquad y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y(t), \qquad y(0) = x,$$

für $x \in X$.

a) Berechnen Sie das durch $(*)$ definierte dynamische System $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$.

b) Bestimmen Sie die Gruppe der Koopmann-Operatoren $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ zu $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$, sowie deren Erzeuger.