KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2016/2017
Institut für Analysis 09. Dezember 2016
Prof. Dr. Lutz Weis
M.Sc. Fabian Hornung

Evolutionsgleichungen
8. Übungsblatt

Aufgabe 19 (Resolvente des Laplace-Operators für $d = 3$)

a) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > 0$ und
$$g_\lambda \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}, \quad g_\lambda(x) := \frac{1}{4\pi|x|} e^{-\lambda|x|}.$$
Zeigen Sie, dass
$$\int_{\mathbb{R}^3} e^{-ix\cdot\xi} g_\lambda(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda^2 + |\xi|^2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^3.$$
Hinweis: Verwenden Sie Kugelkoordinaten.

b) Sei $1 < p < \infty$. Zeigen Sie, dass die Resolvente des Laplace-Operators auf $L^p(\mathbb{R}^3)$ gegeben ist durch
$$R(\lambda^2, \Delta)f = g_\lambda * f, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^3),$$
für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

c) Zeigen Sie, dass jedes $f \in H^2(\mathbb{R}^3)$ eine beschränkte Funktion ist und für jedes $a > 0$ ein $b > 0$ existiert mit
$$\|f\|_{L^\infty} \le a\|\Delta f\|_{L^2} + b\|f\|_{L^2}.$$

Aufgabe 20 (Schrödinger-Operatoren)

Sei $V \in L^2(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3)$ (d.h. es gibt $V_1 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ und $V_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ mit $V = V_1 + V_2$). In $X = L^2(\mathbb{R}^3)$ betrachten wir den Operator $A := \Delta + V$ auf $D(A) = H^2(\mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie:

a) A erzeugt eine analytische Halbgruppe.

b) Ist V reellwertig, so ist A selbstadjungiert;

Hinweis zu a): Verwenden Sie Aufgabe 19 c).

Aufgabe 21 (Störungstheorie positiver Halbgruppen)

Sei $X = L^p(U)$ für $U \subset$ offen und $p \in [1, \infty)$. Ein beschränkter Operator B auf X heißt positiv, wenn für alle $f \in X$ mit $f \ge 0$ fast überall auch $Bf \ge 0$ fast überall gilt. Eine C_0-Halbgruppe heißt positiv, wenn für alle $t \ge 0$ der Operator $T(t)$ positiv ist. Zeigen Sie:

a) Sei A der Erzeuger einer positiven C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\ge0}$ und B ein positiver beschränkter Operator auf X. Dann erzeugt $C := A + B$ eine positive C_0-Halbgruppe.

b) Sei $p \in [1, \infty)$ und $b \in L^\infty(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass der durch $Cf := f' + bf$ für $f \in D(C) = W^{1,p}(\mathbb{R})$ definierte Operator eine positive C_0-Halbgruppe erzeugt.

Hinweise: Verwenden Sie in a) die Dyson-Phillips-Reihe. In b) ist der Operator $B_0 f := (b + \|b_-\|_\infty) f$ nützlich.