KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Lutz Weis
M.Sc. Fabian Hornung

WS 2016/2017
16. Dezember 2016

# Evolutionsgleichungen
## 9. Übungsblatt

**Aufgabe 22 (Formoperatoren)**

Seien $H, V$ Hilberträume mit $V \hookrightarrow H$ dicht und $a : V \times V \to \mathbb{C}$ eine beschränkte, koerzive Sesquilinearform, d.h. es gibt $c, \alpha > 0$ mit

$$|a(u,v)| \leq c\|u\|_Y\|v\|_V, \qquad \operatorname{Re} a(u,u) \geq \alpha\|u\|_V^2, \qquad u,v \in V.$$

Wir definieren

$$Au := -f, \qquad u \in D(A) := \{u \in V : \exists f \in H \forall v \in V : a(u,v) = (f,v)_H\}$$

und nennen $A$ den *zu $a$ assoziierten Operator.*

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Lemmas von Lax-Milgram, dass der Operator wohldefiniert und bijektiv mit beschränkter Inverse ist.

   *Lemma von Lax-Milgram*
   Seien $H, V$ Hilberträume mit $V \hookrightarrow H$ dicht und $a : V \times V \to \mathbb{C}$ eine beschränkte, koerzive Sesquilinearform. Dann gibt es zu jedem antilinearen, beschränkten Funktional $\psi$ auf $V$ genau ein $z \in V$ mit $a(z,v) = \psi(v)$ for all $v \in V$. Die Abbildung $\psi \to z$ ist beschränkt und linear.

b) Zeigen Sie, dass $A$ eine kontraktive analytische Halbgruppe erzeugt und dass $A$ selbstadjungiert ist, falls $a$ zusätzlich symmetrisch ist, d.h. es gilt

$$a(u,v) = \overline{a(v,u)}, \qquad u,v \in V.$$

c) Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ eine beschränkte nichtleere offene Menge, $H = L^2(U)$ und $V = H_0^1(U)$. Wir definieren die Sesquilinearform

$$a(u,v) := \int_U \nabla u \cdot \nabla \overline{v} \mathrm{d}x, \qquad u,v \in Y.$$

   Zeigen Sie, dass $a$ beschränkt, koerziv und symmetrisch ist und der assozierte Operator $A := \Delta_D$ den Operator

$$A_0 u := \Delta u, \qquad u \in D(A_0) := H^2(U) \cap H_0^1(U),$$

   fortsetzt. Wir nennen $\Delta_D$ *Dirichlet-Laplace-Operator.*

**Aufgabe 23 (Wellengleichung)**

Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ eine beschränkte nichtleere offene Menge, $\Delta_D$ der Dirichlet-Laplace-Operator aus Aufgabe 22 c) und $X = H_0^1(U) \times L^2(U)$. Wir definieren

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta_D & 0 \end{pmatrix}, \qquad D(A) = D(\Delta_D) \times H_0^1(U).$$

a) Zeigen Sie, dass $A$ schiefadjungiert ist.

b) Formulieren Sie die lineare Wellengleichung

$$(1) \qquad \begin{cases} \partial_t^2 u(t) = \Delta_D u(t), \quad t > 0, \\ u(0) = u_0, \\ \partial_t u(0) = u_1, \end{cases}$$

in ein System 1. Ordnung um und zeigen Sie, dass es für $u_0 \in D(\Delta_D)$ und $u_1 \in H_0^1(U)$ genau eine klassische Lösung

$$u \in C^2([0,\infty), L^2(U)) \cap C^1\left([0,\infty), H_0^1(U)\right) \cap C\left([0,\infty), D(\Delta_D)\right)$$

von (1) gibt.