Karlsruher Institut für Technologie

17. Oktober 2018
Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Evolutionsgleichungen
1. Übungsblatt

Aufgabe 1
Sei T eine C_0-Halbgruppe auf einem Banachraum $(X, \|\cdot\|)$ und $Y \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum, der T-invariant ist, d.h. es gilt

$$T(t)Y \subseteq Y \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Zeigen Sie, dass durch $S(t)y = T(t)y$ für $t \geq 0$ und $y \in Y$ eine C_0-Halbgruppe S auf $(Y, \|\cdot\|)$ gegeben ist und bestimmen Sie ihren Erzeuger.

Aufgabe 2
Seien $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $X = C_0(U, \mathbb{C})$. Die Funktion $m \in C(U, \mathbb{C})$ erfülle $C := \sup_{x \in U} \operatorname{Re}(m(x)) < \infty$. Wir betrachten den Multiplikationsoperator

$$Af = mf \quad \text{mit} \quad \mathrm{D}(A) = \{f \in X \,|\, mf \in X\}\,.$$

Bestimmen Sie die von A erzeugte C_0-Halbgruppe T.

Aufgabe 3
Sei $X = C_b(\mathbb{R})$. Die Translationsgruppe T sei gegeben durch $T(t)f(s) = f(t+s)$ für $f \in X$ und $s, t \in \mathbb{R}$. Charakterisieren Sie die Menge aller $f \in X$, für die die Abbildung $t \mapsto T(t)f$ stetig ist.

Aufgabe 4
Sei T eine C_0-Halbgruppe, die *normstetig in* 0 ist, d.h. es gelte

$$T(t) \to I \quad \text{in } \mathcal{B}(X) \text{ für } t \to 0+\,.$$

Es sei $V(t) = \int_0^t T(s)\,\mathrm{d}s$ für $t \geq 0$. Zeigen Sie, dass $V(t_0)$ für ein genügend kleines $t_0 > 0$ invertierbar ist und zeigen Sie die Formel

$$T(t) = V(t_0)^{-1}\big(V(t+t_0) - V(t)\big), \quad \text{für } t \geq 0.$$

Folgern Sie, dass der Erzeuger A der C_0-Halbgruppe durch $A = V(t_0)^{-1}(T(t_0) - I) \in \mathcal{B}(X)$ gegeben ist.