Karlsruher Institut für Technologie

24. Oktober 2018
Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Evolutionsgleichungen
2. Übungsblatt

Aufgabe 1
Sei X ein Banachraum und $Y \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum. Sei $T : [0,\infty) \to \mathcal{B}(X)$ eine C_0-Halbgruppe, die Y invariant lässt. Zeigen Sie, dass durch $S(t)(x+Y) = QT(t)x$ für alle $x + Y \in X/Y$ und $t \in [0,\infty)$ eine C_0-Halbgruppe auf X/Y gegeben wird und bestimmen Sie ihren Erzeuger. Dabei ist $Q : X \to X/Y$, $x \mapsto x + Y$ die Quotientenabbildung.

Aufgabe 2
Im Beispiel 1.22a) der Vorlesung wird gezeigt, dass die Translationshalbgruppe T auf $X = C_0(\mathbb{R})$ von $Af = f'$ mit $\mathrm{D}(A) = C_0^1(\mathbb{R}) = \{f \in C^1(\mathbb{R}) \,|\, f, f' \in X\}$ erzeugt wird.

a) Verwenden Sie Aufgabe 1, Blatt 1, um den Erzeuger von T eingeschränkt auf $Y = \{f \in X \mid f(t) = 0 \text{ für alle } t \geq 1\}$ zu bestimmen.

b) Sei $Z = \{f \in Y \mid f(t) = 0 \text{ für alle } t \in [0,1]\}$. Zeigen Sie, dass Y/Z isomorph zu $C_0\big([0,1)\big)$ ist. Verwenden Sie Aufgabe 1, um die Quotientenhalbgruppe auf Y/Z und ihren Erzeuger zu bestimmen. Vergleichen Sie mit Beispiel 1.22b).

c) Bestimmen Sie für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ durch direkte Berechnung die Resolvente $R(\lambda, A)$, wobei A der Erzeuger aus Teil b) ist.

Aufgabe 3
Sei $X = C([-1,0])$. Wir betrachten $Af = f'$ für

$$f \in \mathrm{D}(A) = \Big\{ f \in C^1([-1,0]) \,\Big|\, f'(0) = 0 \Big\}.$$

Zeigen Sie, dass A eine C_0-Halbgruppe erzeugt und dass $\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{0\}$ gilt.

Aufgabe 4
Wie in Aufgabe 4, Blatt 1, sei T eine C_0-Halbgruppe, die normstetig in 0 ist. Geben Sie einen neuen Beweis für die Tatsache, dass der Erzeuger A von T ein beschränkter linearer Operator ist, indem Sie als ersten Schritt $\lambda R(\lambda, A) \to I$ für $\lambda \to \infty$ zeigen.
Hinweis. Verwenden Sie die Resolventenformel aus Satz 1.21a).