Karlsruher Institut für Technologie

31. Oktober 2018
Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Evolutionsgleichungen

3. Übungsblatt

Aufgabe 1
Wir betrachten nochmals die Situation aus Aufgabe 3, Blatt 2. Sei $X = C([-1,0])$. Wir betrachten $Af = f'$ für

$$f \in \mathrm{D}(A) = \{f \in C^1([-1,0]) \,|\, f'(0) = 0\}.$$

Zeigen Sie diesmal mit Hilfe des Satzes von Hille-Yosida, dass A eine C_0-Halbgruppe erzeugt.

Aufgabe 2
Wie in Aufgabe 2, Blatt 1 betrachten wir einen Multiplikationsoperator. Sei $Y = C_0(\mathbb{R})$ und $m \in C(\mathbb{R},\mathbb{C})$ erfülle $C := \sup_{x\in\mathbb{R}} \operatorname{Re}(m(x)) < \infty$. Wir betrachten den Multiplikationsoperator

$$Bf = mf \quad \text{mit} \quad \mathrm{D}(B) = \{f \in Y \,|\, mf \in Y\}\,.$$

a) Zeigen Sie nochmals, dass A eine C_0-Halbgruppe erzeugt, indem Sie die Voraussetzungen von Hille-Yosida nachrechnen.

b) Wie in Beispiel 1.27 der Vorlesung, betrachten wir jetzt $A = \begin{pmatrix} B & B \\ 0 & B \end{pmatrix}$ mit $\mathrm{D}(A) = \mathrm{D}(B) \times \mathrm{D}(B)$ auf $X = Y \times Y$. Finden Sie eine unbeschränkte Funktion m so, dass A eine C_0-Halbgruppe erzeugt.

Aufgabe 3
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $T : [0,\infty) \to \mathcal{B}(X)$ eine beschränkte C_0-Halbgruppe auf X mit $\sup_{t\in[0,\infty)} \|T(t)\| \le M$.

a) Zeigen Sie, dass durch

$$|||x||| := \sup_{t\in[0,\infty)} \|T(t)x\|\,, \quad x \in X,$$

eine äquivalente Norm auf X gegeben ist, bezüglich der T eine Kontraktionshalbgruppe ist.

b) Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$. Zeigen Sie

$$\|R(\lambda_1, A) \cdots R(\lambda_n, A)\| \le \frac{M}{\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n}.$$

Aufgabe 4
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $T : [0,\infty) \to \mathcal{B}(X)$ eine C_0-Halbgruppe auf X. Es gebe $t_0 > 0$ so, dass $I - T(t_0)$ kompakt ist. Zeigen Sie, dass dann $T(t_0)$ invertierbar ist. Folglich kann man T gemäß einem Resultat der Vorlesung zu einer C_0-Gruppe fortsetzen.
Hinweis. Wenn $T(t_0)$ nicht invertierbar wäre, dann liefert die Fredholmsche Alternative, dass 0 ein Eigenwert von $T(t_0)$ ist.