Karlsruher Institut für Technologie

7. November 2018
Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Evolutionsgleichungen

4. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei X ein Banachraum und X^* sei strikt konvex, d.h. für alle $x^*, y^* \in \partial B(0,1)$ mit $\frac{1}{2}(x^* + y^*) \in \partial B(0,1)$ gilt $x^* = y^*$. Zeigen Sie, dass $J(x)$ genau ein Element enthält.

Aufgabe 2

Unter welchen Voraussetzungen ist der Multiplikationsoperator auf $C_0(U)$ wie in Aufgabe 2, Blatt 1, dissipativ?

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die folgenden Operatoren dissipativ sind.

a) $X = C([-1,0])$, $Af = f'$ für alle $f \in \mathrm{D}(A) = \{f \in C^1([-1,0]) \,|\, f(0) = 0\}$.

b) $X = C([0,1])$, $Af = f''$ für alle $f \in \mathrm{D}(A) = \{f \in C^2([0,1]) \,|\, f'(0) = f'(1) = 0\}$.

c) $X = L^2([0,1])$, $Af = f''$

(i) für alle $f \in \mathrm{D}(A) = \{f \in C^2([0,1]) \,|\, f'(0) = f'(1) = 0\}$,

(ii) für alle $f \in \mathrm{D}(A) = \{f \in C^2([0,1]) \,|\, f(0) = f(1), f'(0) = f'(1)\}$.

d) $X = C_0(\mathbb{R}^d)$, $Af = \Delta f$ für alle $f \in \mathrm{D}(A) = C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

e) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit C^1-Rand. Betrachte $X = L^2(U)$, $Af = \Delta f$ für alle $f \in \mathrm{D}(A) = \{f \in C^2(\bar{U}) \,|\, \partial_\nu u(x) = 0 \text{ für alle } x \in \partial U\}$.

Aufgabe 4

Sei X ein reflexiver Banachraum und $A : \mathrm{D}(A) \to X$ ein dissipativer Operator auf X. Sei $\lambda I - A$ surjektiv für ein $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{D}(A)$ dicht in X ist.