Karlsruher Institut für Technologie

14. November 2018
Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Evolutionsgleichungen
5. Übungsblatt

Aufgabe 1
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und A ein dissipativer Operator auf X. Für ein $\lambda > 0$ sei $\lambda - A$ surjektiv.

a) Definiere $X_0 = \overline{\mathrm{D}(A)}$ und

$$A_0 x = Ax \quad \text{für alle } x \in \mathrm{D}(A_0) = \{x \in \mathrm{D}(A) \,|\, Ax \in X_0\}\,.$$

Zeigen Sie, dass A_0 eine Kontraktionshalbgruppe auf $(X_0, \|\cdot\|)$ erzeugt.

b) Wenden Sie Teil a) auf den Operator A aus Aufgabe 3a), Blatt 4, an.

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass der Operator A aus Aufgabe 3b), Blatt 4, die Voraussetzungen des Satzes von Lumer-Phillips erfüllt.

Aufgabe 3
Sei $X = C_0(\mathbb{R}^d)$. Sei $F \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ mit $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \|F'(x)\| < \infty$. Wir betrachten

$$Af = F \cdot \nabla f, \quad \text{für alle } f \in \mathrm{D}(A) = C_c^1(\mathbb{R}^d).$$

Zeigen Sie, dass A abschließbar ist und bestimmen Sie die von $\bar{A}$ erzeugte C_0-Gruppe auf X.
Hinweis. Nach Analysis 4 erzeugt das Vektorfeld F einen globalen Fluss $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. Der Kandidat für die Gruppe lautet dann $T(t)f(x) = f(\varphi(t, x))$ für $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$.

Aufgabe 4
Seien $X = C([0, 1])$ und $Af(t) = t(1 - t)f''(t)$, $t \in (0, 1)$, für alle

$$f \in \mathrm{D}(A) = \Big\{ f \in C^2\big((0,1)\big) \cap C\big([0,1]\big) \,\Big|\, Af \in C_0\big((0,1)\big) \Big\}\,.$$

Zeigen Sie, dass A eine Kontraktionshalbgruppe erzeugt.
Hinweis. Sei $X_0 = C_0\big((0, 1)\big)$. Zeigen Sie zunächst, dass der Operator A_0 als Einschränkung von A auf $\mathrm{D}(A_0) = \mathrm{D}(A) \cap X_0$ eine Kontraktionshalbgruppe auf X_0 erzeugt. Weisen Sie $0 \in \rho(A_0)$ nach.