Karlsruher Institut für Technologie

21. November 2018
Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Evolutionsgleichungen
6. Übungsblatt

Aufgabe 1
Seien X, Y Hilberträume und sei Y dicht in X eingebettet. Sei $a : Y \times Y \to \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform, die beschränkt ist. Außerdem gebe es ein $\omega \in \mathbb{R}$ und $\delta > 0$ mit

$$\operatorname{Re} a(x,x) + \omega \|x\|_X^2 \geq \delta \|x\|_Y^2$$

für alle $x \in Y$. Zur Form a wird der Operator A auf X durch

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(A) &= \{x \in Y \mid \exists\, y \in X \text{ mit } a(x,\varphi) = (y|\varphi)_X \text{ für alle } \varphi \in Y\}, \\ Ax &= -y, \end{aligned}$$

definiert. Zeigen Sie, dass A der Erzeuger einer C_0-Halbgruppe T auf X mit $\|T(t)\| \leq \mathrm{e}^{\omega t}$ für alle $t \in [0,\infty)$ ist.
Hinweis. Untersuchen Sie die Form $b(x,y) = a(x,y) + \omega\,(x|y)_X$, $x, y \in Y$, und zeigen Sie, dass diese zum Operator $B = A - \omega I$ gehört.

Aufgabe 2

a) Sei $X = L^2(0,1)$, $Y = W_0^{1,2}(0,1)$, $a(f,g) = \int_0^1 f'(t)\overline{g'(t)}\,\mathrm{d}t$. Wenden Sie Aufgabe 1 an und zeigen Sie, dass der zu a gehörende Operator mit dem eindimensionalen Dirichlet-Laplace aus der Vorlesung übereinstimmt.

b) Seien $\alpha, \beta \geq 0$. Der eindimensionale Laplace-Operator mit *Robin-Randbedingungen*[1] auf $X = L^2(0,1)$ ist

$$Af = f'', \quad \text{für alle } f \in \mathrm{D}(A) = \{f \in W^{2,2}(0,1) \mid f'(0) = \alpha f(0), f'(1) = -\beta f(1)\}.$$

Zeigen Sie, dass A ein selbstadjungierter, dissipativer Erzeuger ist, indem Sie eine Form a auf $Y = W^{1,2}(0,1)$ finden, die wie in Aufgabe 1 zu A gehört.

c) Seien $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $X = L^2(U)$, $Y = W^{1,2}(U)$. Der Neumann-Laplace auf $L^2(U)$ ist derjenige Operator A, der gemäß Aufgabe 1 zur Form $a(f,g) = \int_U \nabla f(x)\overline{\nabla g(x)}\,\mathrm{d}x$ gehört. Sei U beschränkt mit $\partial U \in C^1$. Sei $Bf = \Delta f$ für alle $f \in \mathrm{D}(B) = \{f \in C^2(\bar{U}) \mid \partial_\nu f = 0\}$, wie in Aufgabe 3e), Blatt 4.

Zeigen Sie $B \subset A$ und $C^2(\bar{U}) \cap \mathrm{D}(A) \subseteq \mathrm{D}(B)$.

Aufgabe 3
Seien $\emptyset \neq U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und $U = U_1 \cup U_2$. Dann gilt $L^2(U) = L^2(U_1) \oplus L^2(U_2)$. Seien T, T_1 und T_2 die vom Dirichlet-Laplace erzeugten C_0-Halbgruppen auf U, U_1, beziehungsweise U_2.

Zeigen Sie, dass $T(t)(f_1,f_2) = \big(T_1(t)f_1, T_2(t)f_2\big)$ für alle $t \in [0,\infty)$ und $(f_1,f_2) \in L^2(U_1) \oplus L^2(U_2)$ gilt.

[1] Nach dem französischen Mathematiker Victor Gustave Robin (1855–1897), Aussprache [ʀɔbɛ̃].