Karlsruher Institut für Technologie

28. November 2018
Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Evolutionsgleichungen
7. Übungsblatt

Aufgabe 1
Sei X ein Banachraum und $A : \mathrm{D}(A) \to X$ der Erzeuger einer C_0-Gruppe auf X. Sei $u \in C([0,\infty), X) \cap C^1((0,\infty), X) \cap C((0,\infty), [\mathrm{D}(A)])$ eine Lösung des Cauchyproblems

$$u'(t) = Au(t), \quad t \in (0,\infty), \qquad u(0) = u_0.$$

Zeigen Sie $u_0 \in \mathrm{D}(A)$.

Aufgabe 2
Sei $m(x) = -x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Seien $X = L^2(\mathbb{R})$ und $Af = mf$ für $f \in \mathrm{D}(A) = \{f \in X \mid mf \in X\}$.

a) Zeigen Sie, dass A ein C_0-Halbgruppe T auf X erzeugt.

b) Sei $u_0 \in X$ und $u(t,x) = T(t)u_0(x)$ für $t \in [0,\infty)$ und $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $u \in C([0,\infty), X) \cap C^1((0,\infty), X) \cap C((0,\infty), [\mathrm{D}(A)])$ eine Lösung des Cauchyproblems

$$u'(t) = Au(t), \quad t \in (0,\infty), \qquad u(0) = u_0$$

ist.

Aufgabe 3
Sei X ein Banachraum und $B : \mathrm{D}(B) \to X$ der Erzeuger einer C_0-Gruppe T auf X. Außerdem gelte $0 \in \rho(B)$. Wir untersuchen das Cauchyproblem zweiter Ordnung

$$u''(t) = B^2 u(t), \quad u(0) = x,\ u'(0) = y. \tag{1}$$

Es sei $A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ B^2 & 0 \end{pmatrix}$ mit $\mathrm{D}(A) = \mathrm{D}(B^2) \times \mathrm{D}(B)$ und $E = [\mathrm{D}(B)] \times X$.

a) Zeigen Sie, dass A dicht definiert und invertierbar ist.

b) Sei $C(t) = \frac{1}{2}(T(t) + T(-t))$ und $S(t) = \frac{1}{2}(T(t) - T(-t))$ für $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass A eine C_0-Gruppe U auf E erzeugt, wobei

$$U(t)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(t)x + S(t)B^{-1}y \\ C(t)y + S(t)Bx \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und $(x,y) \in E$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass das Cauchyproblem (1) wohlgestellt ist: Für alle $(x,y) \in \mathrm{D}(A)$ hat (1) eine eindeutige Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}, X) \cap C^1(\mathbb{R}, \mathrm{D}(B)) \cap C(\mathbb{R}, \mathrm{D}(B^2))$ und es gibt von (x,y) unabhängige Konstanten $M, \omega \geq 0$ mit

$$\|u(t)\|_{[\mathrm{D}(B)]} + \|u'(t)\|_X \leq M e^{\omega|t|}(\|x\|_{[\mathrm{D}(B)]} + \|y\|_X) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Diese Abschätzung zeigt die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Anfangsdaten.

d) Finden Sie ein Cauchyproblem zweiter Ordnung von der Form $u''(t) = Cu(t)$, welches wohlgestellt ist, aber C nicht als $C = B^2$ für irgendeinen Operator B geschrieben werden kann.