Karlsruher Institut für Technologie

5. Dezember 2018
Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

# Evolutionsgleichungen

## 8. Übungsblatt

**Aufgabe 1**
Sei $X$ ein Banachraum, $T$ eine $C_0$-Halbgruppe auf $X$ mit Erzeuger $A : \mathrm{D}(A) \to X$.

a) Sei $f \in C^1([0,\infty), [\mathrm{D}(A)])$. Sei $v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s$ für $t \in [0,\infty)$.
Zeigen Sie $v \in C^2([0,\infty), X) \cap C^1([0,\infty), [\mathrm{D}(A)]) \cap C([0,\infty), [\mathrm{D}(A^2)])$.

b) Sei $f \in C^2([0,\infty), X)$, $u_0 \in \mathrm{D}(A)$ mit $Au_0 + f(0) \in \mathrm{D}(A)$. Sei $u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s$, $t \in [0,\infty)$, die milde Lösung des Cauchyproblems $u' = Au + f$, $u(0) = u_0$.
Zeigen Sie $u \in C^2([0,\infty), X) \cap C^1([0,\infty), [\mathrm{D}(A)])$.

**Aufgabe 2**
Sei $X$ ein Banachraum, $T$ eine $C_0$-Halbgruppe auf $X$ mit $\omega_0(T) < 0$ und Erzeuger $A : \mathrm{D}(A) \to X$. Für $\alpha \in (0,1]$ ist der *Favard-Raum* durch

$$F_\alpha = \Big\{ x \in X \,\Big|\, \sup_{t>0} \big\| t^{-\alpha}(T(t)x - x) \big\| < \infty \Big\}$$

mit der Norm $\|x\|_{F_\alpha} = \sup_{t>0} \big\| t^{-\alpha}(T(t)x - x)\big\|$ gegeben. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) $F_\alpha$ ist ein Banachraum.

b) $F_\alpha$ ist invariant unter $T$ und es gilt $T(t) \in \mathcal{B}(F_\alpha)$ für alle $t \in [0,\infty)$.

c) $\mathrm{D}(A) \hookrightarrow F_\alpha \hookrightarrow F_\beta \hookrightarrow X$ für $0 < \beta < \alpha < 1$.

d) Es gilt $F_\alpha = \{x \in X \mid \sup_{\lambda>0} \|\lambda^\alpha AR(\lambda, A)x\| < \infty\}$ und $|||x|||_{F_\alpha} = \sup_{\lambda>0} \|\lambda^\alpha AR(\lambda, A)x\|$ ist eine äquivalente Norm auf $F_\alpha$.

**Aufgabe 3**
Sei $X = C_0(\mathbb{R})$ und $Af = f'$ für $f \in \mathrm{D}(A) = C_0^1(\mathbb{R})$ der Erzeuger des Linksshifts. Sei $T$ die von $A - I$ erzeugte Halbgruppe. Bestimmen Sie den zugehörigen Favard-Raum $F_\alpha$ für $\alpha \in (0,1]$.