Karlsruher Institut für Technologie

12. Dezember 2018
Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Evolutionsgleichungen
9. Übungsblatt

Aufgabe 1
Seien $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $X = C_0(U, \mathbb{C})$. Für $m \in C(U, \mathbb{C})$ betrachten wir wieder mal den Multiplikationsoperator

$$Af = mf \quad \text{mit} \quad \mathrm{D}(A) = \{f \in X \mid mf \in X\}.$$

Charakterisieren Sie durch Eigenschaften von m, dass A eine beschränkte analytische Halbgruppe vom Winkel $\delta \in (0, \pi/2)$ erzeugt.

Aufgabe 2
Sei X ein Banachraum, T eine beschränkte C_0-Gruppe auf X mit Erzeuger $A : \mathrm{D}(A) \to X$. Zeigen Sie, dass A^2 eine analytische Halbgruppe vom Winkel $\pi/2$ erzeugt.
Zusatz. Die Aussage stimmt auch, wenn T nicht notwendigerweise beschränkt ist.

Aufgabe 3
Seien X, Y Hilberträume und sei Y dicht in X eingebettet. Sei $a : Y \times Y \to \mathbb{C}$ eine beschränkte Sesquilinearform. Außerdem sei a strikt akkretiv, d.h., es gebe ein $\delta > 0$ mit

$$\operatorname{Re} a(x, x) \geq \delta \, \|x\|_Y^2$$

für alle $x \in Y$. Aus Aufgabe 1, Blatt 6 wissen wir, dass der Operator

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(A) &= \{x \in Y \mid \exists\, y \in X \text{ mit } a(x, \varphi) = (y|\varphi)_X \text{ für alle } \varphi \in Y\}, \\ Ax &= -y, \end{aligned}$$

eine Kontraktionshalbgruppe erzeugt. Zeigen Sie, dass A sogar eine analytische Halbgruppe erzeugt.

Aufgabe 4
Sei X ein Banachraum, T eine analytische C_0-Halbgruppe auf X mit $\omega_0(T) < 0$ und Erzeuger $A : \mathrm{D}(A) \to X$. Sei $\alpha \in (0, 1]$. Zeigen Sie

$$F_\alpha = \Big\{x \in X \,\Big|\, \sup_{t>0} \big\|t^{1-\alpha} A T(t) x\big\| < \infty\Big\}$$

und dass $|||x||| = \sup_{t>0} \big\|t^{1-\alpha} A T(t) x\big\|$ eine äquivalente Norm auf F_α ist. Dabei ist F_α der Favard-Raum aus Aufgabe 2, Blatt 8.