Karlsruher Institut für Technologie

19. Dezember 2018
Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Evolutionsgleichungen

10. Übungsblatt

Aufgabe 1
Sei $X = C([0,1])$, $Af = f''$ für $f \in \mathrm{D}(A) = \{f \in C^2([0,1]) \,|\, f'(0) = 0, f'(1) = 0\}$. Zeigen Sie, dass A sektoriell vom Winkel π ist.

Aufgabe 2
Sei X ein Banachraum, T eine analytische C_0-Halbgruppe vom Winkel $\theta \in (0, \pi/2]$ auf X mit Erzeuger $A : \mathrm{D}(A) \to X$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

a) Der Operator $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} A$ erzeugt eine C_0-Halbgruppe $T(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \cdot)$ auf X.

b) Es gilt $\sup_{z \in D} \|T(z)\| < \infty$.

Dabei ist $D = \{z \in \Sigma_\theta \,|\, \operatorname{Im} z \geq 0 \text{ und } |z| \leq 1\}$. In diesem Fall gilt

$$T(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} s)x = \lim_{t \to 0+} T(t + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} s)x$$

für alle $x \in X$ und $s \in [0, \infty)$. Man nennt $T(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \cdot)$ die zu T gehörende *Randhalbgruppe*.

Aufgabe 3
Wir setzen Aufgabe 4, Blatt 9, fort. Sei X ein Banachraum, T eine analytische C_0-Halbgruppe auf X mit $\omega_0(T) < 0$ und Erzeuger $A : \mathrm{D}(A) \to X$. Seien $\alpha \in (0,1)$, $f \in C([0,\infty), X)$ und $v(t) = \int_0^t T(t-s) f(s) \,\mathrm{d}s$ für $t \in [0, \infty)$.

a) Zeigen Sie, dass es $C > 0$ mit

$$\|x\|_{F_\alpha} \leq C \|Ax\|^\alpha \|x\|^{1-\alpha}$$

für alle $x \in \mathrm{D}(A)$ gibt.

b) Zeigen Sie, dass es $C > 0$ mit

$$\|T(t)\|_{\mathcal{B}(X, F_\alpha)} \leq C t^{-\alpha}$$

für alle $t \in (0, \infty)$ gibt.

c) Zeigen Sie $v \in C([0,\infty), F_\alpha)$.

d) Es gelte sogar $f \in C([0,\infty), F_\alpha)$. Zeigen Sie $v(t) \in \mathrm{D}(A)$ für alle $t \in [0, \infty)$ und $Av \in C([0,\infty), X)$.