Karlsruher Institut für Technologie

9. Januar 2019
Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Evolutionsgleichungen
11. Übungsblatt

Aufgabe 1
Sei X ein Banachraum, $A : \mathrm{D}(A) \to X$ erzeuge eine C_0-Halbgruppe T auf X und sei $B \in \mathcal{B}(X)$. Zeigen Sie, dass es eine äquivalente Norm auf X gibt, bezüglich der A, B und $A + B$ Quasikontraktionshalbgruppen erzeugen.

Aufgabe 2
Sei X ein Banachraum, $A : \mathrm{D}(A) \to X$ erzeuge eine C_0-Halbgruppe T auf X und für jedes $t \in (0, \infty)$ sei $T(t)$ ein kompakter Operator.

a) Zeigen Sie, dass $T : (0, \infty) \to \mathcal{B}(X)$ stetig (bezüglich der Operatornorm) ist.

b) Sei $B \in \mathcal{B}(X)$. Zeigen Sie, dass $A + B$ eine C_0-Halbgruppe S erzeugt, wobei $S(t)$ für jedes $t \in (0, \infty)$ kompakt ist.

Aufgabe 3
Sei X ein Banachraum, T eine C_0-Halbgruppe auf X mit $\omega_0(T) < 0$ und Erzeuger $A : \mathrm{D}(A) \to X$. Wie in Aufgabe 2, Blatt 8, definiert man den zu A gehörenden Favard-Raum F_α für $\alpha \in (0, 1)$. Sei $B : \mathrm{D}(B) \to X$ ein abgeschlossener Operator auf X und es sei $F_\alpha \subseteq \mathrm{D}(B)$ für ein $\alpha \in (0, 1)$. Zeigen Sie, dass B A-beschränkt ist und A-Schranke 0 hat.

Aufgabe 4
Sei $X = L^1(\mathbb{R})$. Der Wärmeleitungskern ist $G_t(s) = (4\pi t)^{-1/2} \mathrm{e}^{-|s|^2/4t}$ für $s \in \mathbb{R}$ und $t > 0$. Durch $T(0) = I$ und

$$T(t)f(s) = (G_t * f)(s) = \int_{\mathbb{R}} G_t(s - r) f(r) \, \mathrm{d}r, \quad \text{für } s \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0$$

wird eine beschränkte analytische Halbgruppe auf X definiert. Mit Hilfe der Fouriertransformation kann man zeigen, dass ihr Erzeuger A der Abschluss des Laplace-Operators auf dem Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist. Sei $p \in (1, \infty]$, $m \in L^p(\mathbb{R})$ mit zugehörigem Multiplikationsoperator $Bf = mf$ auf $\mathrm{D}(B) = \{f \in X \mid mf \in X\}$.

Zeigen Sie, dass B A-beschränkt ist und A-Schranke 0 hat.
Hinweis. Schätzen Sie $\|BR(\lambda, A)f\|_1$ ab und betrachten Sie $\lambda \to \infty$. Verwenden Sie für die Resolvente die Darstellung über die Halbgruppe $R(\lambda, A)f = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t) f \, \mathrm{d}t$.