Karlsruher Institut für Technologie

16. Januar 2019
Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Evolutionsgleichungen

12. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei X ein Banachraum, T eine analytische C_0-Halbgruppe auf X mit $\omega_0(T) < 0$ und Erzeuger $A : \mathrm{D}(A) \to X$. Sei $\alpha \in (0,1)$. Wie in Aufgabe 2, Blatt 8, definiert man den zu A gehörenden Favard-Raum F_α. Seien $B_n \in \mathcal{B}(F_\alpha, X)$ für $n \in \mathbb{N}$ und es gelte $\|B_n\|_{\mathcal{B}(F_\alpha,X)} \to 0$ für $n \to \infty$. Sei $t_0 > 0$. Zeigen Sie, dass die Operatoren $A_n = A + B_n$, $\mathrm{D}(A_n) = \mathrm{D}(A)$ analytische Halbgruppen T_n auf X erzeugen und dass $T_n(t)$ gegen $T(t)$ gleichmäßig für $t \in [0, t_0]$ konvergiert.

Aufgabe 2

Sei $X = C_0(\mathbb{R})$, $Af = f'$ mit $\mathrm{D}(A) = C_0^1(\mathbb{R})$. Wir wissen, dass A den Linksshift T auf X erzeugt. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere $A_n \in \mathcal{B}(X)$ durch

$$A_n f(s) = n\Big(T(\tfrac{1}{n})f(s) - f(s)\Big) = \frac{f(s+1/n) - f(s)}{1/n}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie die Konvergenz $\mathrm{e}^{tA_n} f \to T(t)f$ für alle $f \in X$ und $n \to \infty$, gleichmäßig für $t \in [0,1]$.

b) Sei $f \in X$. Zeigen Sie, dass es eine Folge $(m_n)_n$ in $\mathbb{N}$ mit $m_n \to \infty$ für $n \to \infty$ gibt, für die

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m_n} \frac{t^k}{k!}(A_n^k f)(0)$$

gleichmäßig für $t \in [0,1]$ gilt. (Es folgt der Approximationssatz von Weierstraß.)

Aufgabe 3

a) Sei X ein Banachraum. Sei $A : \mathrm{D}(A) \to X$ Erzeuger einer C_0-Halbgruppe auf X. Sei $V : [0,\infty) \to \mathcal{B}(X)$ mit $V(0) = I$. Sei Y ein Banachraum mit dichter Einbettung $Y \hookrightarrow X$, der invariant unter der Halbgruppe T ist. Es gebe $M, \omega > 0$ mit $\|V(\tfrac{t}{n})^n\| \le M\mathrm{e}^{\omega t}$ und $\|T(t)\|_{\mathcal{B}(Y)} \le M\mathrm{e}^{\omega t}$ für alle $t \in [0,\infty)$ und $n \in \mathbb{N}$. Außerdem gebe es $C > 0$ und $p > 0$ mit

$$\|V(h)x - T(h)x\|_X \le Ch^{p+1}\|x\|_Y$$

für alle $x \in Y$ und $h > 0$. Zeigen Sie, dass es für jedes $t_0 > 0$ ein $K > 0$ gibt, mit

$$\|V(\tfrac{t}{n})^n x - T(t)x\|_X \le Kn^{-p}\|x\|_Y$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0, t_0]$ und alle $x \in Y$. (Man sagt auch, dass $V(t/n)$ mit *Ordnung* p gegen $T(t)$ auf Y konvergiert.)

Hinweis. Schreiben Sie $V(\tfrac{t}{n})^n - T(\tfrac{t}{n})^n$ als Teleskopreihe.

b) Seien $t_0 > 0$ und $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$. Die Lie-Trotter Formel zeigt $\|(\mathrm{e}^{t/nA}\mathrm{e}^{t/nB})^n - \mathrm{e}^{t(A+B)}\| \to 0$ für $n \to \infty$ gleichmäßig für $t \in [0, t_0]$. Zeigen Sie, dass es $C > 0$ mit

$$\|(\mathrm{e}^{t/nA}\mathrm{e}^{t/nB})^n - \mathrm{e}^{t(A+B)}\| \le Cn^{-1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $t \in [0, t_0]$ gibt.