Karlsruher Institut für Technologie

23. Januar 2019
Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Evolutionsgleichungen

13. Übungsblatt

Aufgabe 1
Sei X ein Banachraum. Sei $A : \mathrm{D}(A) \to X$ Erzeuger einer C_0-Halbgruppe auf X und $B \in \mathcal{B}(X)$. Es gebe einen Banachraum Y mit stetigen und dichten Einbettungen $\mathrm{D}(A) \hookrightarrow Y \hookrightarrow X$ so, dass $\mathrm{D}(A)$ invariant unter B und Y invariant unter der Halbgruppe T ist. Außerdem sei $T|_Y$ eine C_0-Halbgruppe auf Y. Schließlich gebe es $C > 0$ mit

$$\|[A,B]x\|_X \le C\|x\|_Y$$

für alle $x \in \mathrm{D}(A)$, wobei $[A,B]x = ABx - BAx$ der Kommutator von A und B ist. Sei S die von $A + B$ erzeugte C_0-Halbgruppe. Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 3a), Blatt 12, dass das Splittingverfahren $V(h) = \mathrm{e}^{hB}T(h)$ mit Ordnung $p = 1$ auf Y gegen S konvergiert, d.h. für jedes $t_0 > 0$ gibt es $K > 0$ mit

$$\left\|V\left(\tfrac{t}{n}\right)^n x - S(t)x\right\|_X \le Kn^{-1}\|x\|_Y$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0,t_0]$ und $x \in Y$.
Hinweis. Nehmen Sie die ersten beiden Terme der Dyson-Phillips Reihe für S und die Taylorformel $\mathrm{e}^{hB}T(h)x = T(h)x + hBT(h)x + \int_0^h (h-s)B^2\mathrm{e}^{sB}T(h)x\,\mathrm{d}s$ als Ausgangspunkt.

Aufgabe 2
Wir betrachten das Cauchyproblem für die eindimensionale Schrödingergleichung

$$\partial_t u(t,x) = \mathrm{i}\partial_{xx}u(t,x) - \mathrm{i}V(x)u(t,x), \quad t \in \mathbb{R},\ x \in [0,1],$$

mit Anfangswerten $u(0,x) = u_0(x)$, $x \in [0,1]$, und periodischen Randbedingungen. Dazu sei $X = L^2(0,1)$ und wir setzen

$$W^{1,2}_{\mathrm{per}}(0,1) = \{f \in W^{1,2}(0,1) \mid f(0) = f(1)\},$$
$$W^{2,2}_{\mathrm{per}}(0,1) = \{f \in W^{2,2}(0,1) \mid f(0) = f(1), f'(0) = f'(1)\}.$$

Sei $V \in C^2_{\mathrm{per}}(0,1) = \{f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) \mid f \text{ ist 1-periodisch}\}$. Seien $A = \mathrm{i}\partial_{xx}$ mit $\mathrm{D}(A) = W^{2,2}_{\mathrm{per}}(0,1)$, $Bf = -\mathrm{i}Vf$, für $f \in X$ und $Y = W^{1,2}_{\mathrm{per}}(0,1)$.

a) Zeigen Sie, dass A eine C_0-Gruppe T auf X erzeugt.

b) Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen von Aufgabe 1 auf Y erfüllt sind.

Aufgabe 3
Seien $\emptyset \ne U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $X = C_0(U,\mathbb{C})$. Die Funktion $m \in C(U,\mathbb{C})$ erfülle $C := \sup_{x\in U}\mathrm{Re}(m(x)) < \infty$. Wir betrachten den Multiplikationsoperator

$$Af = mf \quad \text{mit} \quad \mathrm{D}(A) = \{f \in X \mid mf \in X\}.$$

Wir wissen, dass A eine C_0-Halbgruppe T erzeugt und dass $\sigma(A) = \overline{m(U)}$ und folglich $s(A) = C$ gilt.

a) Zeigen Sie, dass T genau dann exponentiell stabil ist, wenn $s(A) < 0$ gilt.

b) Sei $\alpha > 0$ und es gelte $C = 0$. Charakterisieren Sie die Eigenschaft $\|T(t)\|_{\mathcal{B}([\mathrm{D}(A)],X)} = \mathcal{O}(t^{-\alpha})$ für $t \to \infty$ durch Eigenschaften von m.