Karlsruher Institut für Technologie

30. Januar 2019
Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Evolutionsgleichungen

14. Übungsblatt

Aufgabe 1

Für $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ seien $X_k = \mathbb{C}^k$, $B_k = \left(\delta_{i,j-1}\right)_{i,j=1}^k$ ein Jordankästchen und

$$A_k = 2\pi \mathrm{i} k I_k + B_k.$$

Sei $X = \bigoplus\limits_{k=2}^{\infty} X_k$ mit $\|x\|_X^2 = \sum_{k=2}^{\infty} \|x_k\|^2$ und

$$A = \bigoplus_{k=2}^{\infty} A_k, \quad \text{mit } \mathrm{D}(A) = \left\{ x \in X \,\middle|\, \sum_{k=2}^{\infty} k^2 \|x_k\|^2 < \infty \right\}.$$

Zeigen Sie, dass A eine C_0-Halbgruppe auf X erzeugt und dass $0 = s(A) < \omega_0(A) = 1$ gilt.

Aufgabe 2

Finden Sie jeweils eine Halbgruppe T auf einem Banachraum X mit der folgenden Eigenschaft.

a) Es gilt $\lim_{t\to\infty} \|T(t)x\| = 0$ für alle $x \in X$, aber T ist nicht exponentiell stabil.

b) Es gilt $\lim_{t\to\infty} \langle T(t)x, x^* \rangle = 0$ für alle $x \in X$ und $x^* \in X^*$, aber die Aussage in Teil a) ist nicht erfüllt.

c) Es gilt $\omega_0(T) = 0$, aber es gibt kein Polynom p mit $\|T(t)\| \leq p(t)$ für alle $t \in [0, \infty)$. *Hinweis.* Rechtsshift auf einem gewichteten L^2-Raum, wobei das positive Gewicht w die Gleichung $w(t+s) \leq w(t)w(s)$ für alle $t, s \in [0, \infty)$ erfüllt.

Aufgabe 3

Sei X ein Banachraum und $A : \mathrm{D}(A) \to X$ erzeuge eine C_0-Halbgruppe T auf X. Die Halbgruppe T habe eine exponentielle Dichotomie. Zeigen Sie, dass es $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für alle $B \in \mathcal{B}(X)$ mit $\|B\| < \varepsilon$ auch die von $A + B$ erzeugt Halbgruppe S eine exponentielle Dichotomie hat.