Institut für Analysis
Universität Karlsruhe
Roland Schnaubelt, Bernhard Haak

Karlsruhe, den 25.10.06

Übungen zur Vorlesung

Funktionalanalysis (Wintersemester 2006)

Blatt 1

Aufgabe 1. (schriftlich, 4 Punkte)
Gegeben seien die Räume $C_b(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}; f \text{ ist stetig und beschränkt}\}$ und $C_0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}; f \text{ stetig}, \lim_{|t|\to\infty} f(t) = 0\}$ (versehen mit der üblichen Addition von Funktionen und Multiplikation mit Zahlen), sowie $\|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$. Zeigen Sie, dass $(C_b(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ und $(C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ Banachräume sind.

Aufgabe 2. (schriftlich, 4 Punkte)
Auf einem Vektorraum X sei eine Metrik d gegeben, die *translationsinvariant* und *homogen* ist, d.h.: Es gelten $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ und $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\, d(x, y)$ für alle $x, y, z \in X$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass $\|x\| = d(x, 0)$ eine Norm ist, die genau dann vollständig ist, wenn d eine vollständige Metrik ist.

Aufgabe 3. (mündlich)
Für $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$ sei $C^k([0, 1])$ der Raum der k–mal stetig differenzierbaren Funktionen $f : [0, 1] \to \mathbb{K}$ und man setze $\|f\|_{C^k} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \cdots + \|f^{(k)}\|_\infty$ für $f \in C^k([0, 1])$. Zeigen Sie, dass $C^k([0, 1]), \|\cdot\|_{C^k})$ ein Banachraum ist.

Aufgabe 4. (mündlich)
Gegeben sei der Raum $C(\mathbb{R})$ der stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, die Halbnormen $p_k(f) = \sup_{|t|\le k} |f(t)|$ für $k \in \mathbb{N}$ und $f \in C(\mathbb{R})$, sowie

$$d(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{p_k(f - g)}{1 + p_k(f - g)}$$

für $f, g \in C(\mathbb{R})$. Zeige Sie, dass d eine vollständige Metrik auf $C(\mathbb{R})$ ist.

Abgabe der schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben bis Mittwoch, den 8.11.06, 15:30 Uhr, in den Einwurfschlitz ‘Funktionalanalysis’ neben Zimmer 328..