Institut für Analysis
Universität Karlsruhe
Roland Schnaubelt, Bernard Haak

Karlsruhe, den 17.1.07

Übungen zur Vorlesung

Funktionalanalysis (Wintersemester 2006/07)

Blatt 10

Aufgabe 37. (schriftlich)
Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Für $x = (x_k) \in \ell^\infty$ und $y = (y_k) \in c$ definiere man

$$p(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \qquad \text{und} \qquad \varphi_0(y) = \lim_{k\to\infty} y_k \,.$$

(Beachten Sie, dass $p(y) = \varphi_0(y)$ für $y \in Y$.) Man zeige, dass p sublinear ist. Es sei $\varphi \in (\ell^\infty)^*$ eine Fortsetzung von φ_0 mit $\varphi(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$. Man zeige, die folgenden Aussagen für $x \in \ell^\infty$:

(i) $\liminf_{k\to\infty} x_k \leq \varphi(x) \leq \limsup_{k\to\infty} x_k$.
(ii) Wenn $x_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dann $\varphi(x) \geq 0$.
(iii) $\varphi(Lx) = \varphi(x)$, wobei $Lx = (x_{k+1})$ der Linksshift ist.
(iv) Finden Sie $y, z \in \ell^\infty$, sodass $\varphi(y \cdot z) \neq \varphi(y)\varphi(z)$, wobei $y \cdot z = (y_k z_k)$.

Aufgabe 38. (schriftlich)
Es seien X und Y normierte Vektorräume. Man zeige die folgenden Aussagen.

(a) Für jeden Untervektoraum Z von X gilt $\overline{Z} = \bigcap\{N(x^*) : x^* \in X^*,\ Z \subset N(x^*)\}$.
(b) Sei $x \in X$ mit $\|x\| = 1$. Dann gibt es ein $x^* \in X^*$ mit $\langle x, x^*\rangle = 1$ und $\mathrm{Re}\langle z, x^*\rangle < 1$ für alle $z \in X$ mit $\|z\| < 1$.
(c) Wenn $J : Y \to X$ eine stetige Einbettung mit dichtem Bild ist, dann ist X^* stetig in Y^* eingebettet.

Aufgabe 39. (mündlich)
Es seien X und Y normierte Vektorräume. Man zeige die folgenden Aussagen.

(a) Ein lineares $\varphi : X \to \mathbb{K}$ ist genau dann stetig, wenn $N(\varphi)$ abgeschlossen ist.
(b) $X^* \times Y^*$ ist isomorph zu $(X \times Y)^*$.

Aufgabe 40. (mündlich)
Es seien X ein Banachraum, $Y \subset X$ ein abgeschlossener Untervektorraum und $\pi : X \to X/Y$, $\pi(x) = x + Y$, die Quotientenabbildung. Man zeige, dass dann die Abbildungen

$$T : X^*/Y^\perp \to Y^*, \quad T(x^* + Y^\perp) = (x^*)_{|Y}; \qquad S : (X/Y)^* \to Y^\perp, \quad S\varphi = \varphi \circ \pi$$

wohldefiniert und isometrische Isomorphismen sind.

Abgabe der schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben bis Mittwoch, den 24.1.07, 15:30 Uhr, in den Einwurfschlitz ‘Funktionalanalysis’ neben Zimmer 328.