Institut für Analysis
Universität Karlsruhe
Roland Schnaubelt, Bernard Haak

Karlsruhe, den 8.11.06

Übungen zur Vorlesung

Funktionalanalysis (Wintersemester 2006/07)

Blatt 2

Aufgabe 5. (schriftlich, 5 Punkte)
Berechnen Sie für die folgenden Teilmengen Y der jeweiligen Banachräume X den Abschluss $\overline{Y}$ bezüglich der Supremumsnorm.
(a) $X = C_b(\mathbb{R})$, $\quad Y = \{f \in X : f(t) = f(t+1) \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}\}$.
(b) $X = C([0,1])$, $\quad Y = \{f \in X : \exists\, f'(0) = 0\}$.
(c) $X = C([0,1])$, $\quad Y = \{f \in X : |f(t) - f(s)| \le 2\,|t-s| \ \ \forall\, t, s \in [0,1]\}$.
(d) $X = C_0(\mathbb{R})$, $\quad Y = \{f \in X : 0 < f(t) \le (1+|t|)^{-1} \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}\}$. Berechnen Sie in diesem Fall auch das Innere Y°.

Aufgabe 6. (schriftlich, 4 Punkte)
Für $\alpha \in (0,1)$ und $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ definiere man

$$[f]_\alpha = \sup_{t,s\in[a,b],t\neq s} \frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|^\alpha}$$

und setze $C^\alpha([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{K} : [f]_\alpha < \infty\}$ und $\|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + [f]_\alpha$. Man zeige, dass $(C^\alpha([a,b]), \|\cdot\|_\alpha)$ ein Banachraum ist. Es sei $0 < \delta < b-a$. Zeigen Sie weiter, dass

$$|||f|||_\alpha = |f(a)| + \sup_{t,s\in[a,b],0<|t-s|\le\delta} \frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|^\alpha}\,.$$

eine äquivalente Norm auf $C^\alpha([a,b])$ ist. Schließlich zeige man $C^1([a,b]) \subset C^\beta([a,b]) \subset C^\alpha([a,b])$ für $0 < \alpha < \beta < 1$.

Aufgabe 7. (mündlich)
(a) Für eine Menge $M \neq \emptyset$ und einen Banachraum $(X, \|\cdot\|)$ definiere man $B(M,X) = \{f : M \to X : f \text{ beschränkt}\}$. (Man setzt $B(M) := B(M,\mathbb{K})$.) Zeigen Sie, dass $B(M,X)$ bezüglich $\|f\|_\infty = \sup_{t\in M} \|f(t)\|$ ein Banachraum ist.
(b) Man zeige, dass der Raum c der konvergenten Folgen in $\ell^\infty := B(\mathbb{N})$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 8. (mündlich)
Auf $X = \mathbb{R}^2$ definiere man $\|(x,y)\|_p = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$ für $0 < p < 1$. Ist dies eine Norm?

Abgabe der schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben bis Mittwoch, den 15.11.06, 15:30 Uhr, in den Einwurfschlitz ‘Funktionalanalysis’ neben Zimmer 328.