Institut für Analysis
Universität Karlsruhe
Roland Schnaubelt, Bernard Haak

Karlsruhe, den 15.11.06

Übungen zur Vorlesung

Funktionalanalysis (Wintersemester 2006/07)

Blatt 3

Aufgabe 9. (schriftlich, 4 Punkte)
Für welche $p \in [1,\infty)$ liegen die folgenden Funktionen f_n, $n \in \mathbb{N}$, in $L^p(A)$ und konvergieren in $L^p(A)$ gegen ein $f \in L^p(A)$ für $n \to \infty$?

(a) $A = \mathbb{R}_+$, $f_n(x) = n^{-1}x^\alpha$ für $x \in [0,n]$, $f_n(x) = 0$ für $x > n$, wobei $\alpha \in (0,1)$ eine Konstante ist.
(b) $A = (0,1]$, $f_n(x) = \cos((nx)^{-1})$.
(c) $A = (0,\infty)$, $f_n(x) = x^{-\frac{1}{2}}\, e^{-nx^2}$.

Aufgabe 10. (schriftlich, 4 Punkte)
Es seien $A \subset \mathbb{R}^d$ messbar und $p,q,r \in [1,\infty]$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Seien $f, f_n \in L^p(A)$, $g, g_n \in L^{p'}(A)$, sowie $f_n \to f$ in $L^p(A)$ und $g_n \to g$ in $L^{p'}(A)$ für $n \to \infty$. Dann gilt $f_n g_n \to fg$ in $L^1(A)$.
(b) Es gelten $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, $f \in L^p(A)$ und $g \in L^q(A)$. Dann folgt $fg \in L^r(A)$ und $\|fg\|_r \le \|f\|_p\, \|g\|_q$.
(c) Es gelten $1 = \frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$, $f \in L^p(A)$, $g \in L^q(A)$ und $h \in L^r(A)$. Dann folgt $fgh \in L^1(A)$ und $\|fgh\|_1 \le \|f\|_p\, \|g\|_q\, \|h\|_r$.
(d) Seien $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p < \infty$, $a > 0$. Dann folgt $\lambda(\{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| \ge a\}) \le a^{-p}\, \|f\|_p^p$.

Aufgabe 11. (mündlich)
Seien $A \subset \mathbb{R}^d$ messbar und $1 \le p < r < q \le \infty$. Dann gibt es ein $\theta \in (0,1)$ mit

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}, \qquad \text{nämlich} \ \ \theta = \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{q}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}\,.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Wenn $f \in L^p(A) \cap L^q(A)$, dann gilt $f \in L^r(A)$ und $\|f\|_r \le \|f\|_p^\theta\, \|f\|_q^{1-\theta}$.
(b) Es seien $f_n, f \in L^p(A) \cap L^q(A)$ mit $f_n \to f$ in $L^p(A)$ für $n \to \infty$ und $\|f_n\|_q \le c$ für $n \in \mathbb{N}$ und eine Konstante $c \ge 0$. Dann konvergiert f_n gegen f in $L^r(A)$ für $n \to \infty$.
(c) Es sei $f \in L^\infty(A) \cap L^p(A)$. Dann gilt $\|f\|_r \to \|f\|_\infty$ für $r \to \infty$.

Aufgabe 12. (mündlich)
Zeigen Sie, dass die Räume $L^p(\mathbb{R})$ und $L^q(\mathbb{R})$ für alle $1 \le p < q \le \infty$ ungleich sind.

Abgabe der schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben bis Mittwoch, den 22.11.06, 15:30 Uhr, in den Einwurfschlitz 'Funktionalanalysis' neben Zimmer 328.