Institut für Analysis
Universität Karlsruhe
Roland Schnaubelt, Bernard Haak

Karlsruhe, den 22.11.06

Übungen zur Vorlesung

Funktionalanalysis (Wintersemester 2006/07)

Blatt 4

Aufgabe 13. (schriftlich, 4 Punkte)
Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ messbar. Zeigen Sie:

(a) Für messbare $f_n : A \to [0,\infty]$, $n \in \mathbb{N}$, gilt $\int_A \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n(x)\,dx$.

(b) Für messbare $A_n \subset \mathbb{R}^d$ mit $A_n \subset A_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A$ gilt $\lambda(\bigcup_{n=1}^{N} A_n) \to \lambda(A)$ für $N \to \infty$.

(c) Für $p \in [1,\infty]$ und eine messbare Funktion $w : A \to \mathbb{R}$ mit $w(x) > 0$ für alle $x \in A$ definiere man $E = \{f + \mathcal{N}_A : f : A \to \mathbb{C} \text{ ist messbar}, wf \in \mathcal{L}^p(A)\}$. Dann ist E ein Banachraum mit der Norm $\|f + \mathcal{N}_A\| = \|wf\|_p$. Ferner gilt $L^p(\mathbb{R}^d) \subset E$, wenn w beschränkt ist.

Aufgabe 14. (schriftlich, 4 Punkte)
Für metrische Räume (M,d) und (M',d') zeige man:

(a) Wenn M kompakt ist und $A \subset M$ abgeschlossen in M, dann ist A kompakt in M.

(b) Wenn $K \subset M$ kompakt ist in M und $f \in C(M,M')$, dann ist $f(K)$ kompakt in M'.

(c) Seien M kompakt und $f \in C(M,M')$ bijektiv. Dann ist $f^{-1} : M' \to M$ stetig.

(d) Sei nun $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und F eine kompakte Teilmenge in $X = C(K)$. Dann ist F gleichgradig stetig.

Aufgabe 15. (mündlich)
Es sei $p \in [1,\infty)$ und K eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge in ℓ^p, so dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt mit $\sum_{k=N_\varepsilon}^{\infty} |x_k|^p \le \varepsilon^p$ für alle $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in K$. Dann ist K in ℓ^p kompakt.

Aufgabe 16. (mündlich)
Es sei $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ für $x \ge 1$. Man zeige, dass f auf $[1,\infty)$ nicht (Lebesgue) integrierbar ist, dass aber $\lim_{b\to\infty} \int_1^b f(x)\,dx$ in $\mathbb{R}$ existiert.

Abgabe der schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben bis Mittwoch, den 29.11.06, 15:30 Uhr, in den Einwurfschlitz ‘Funktionalanalysis’ neben Zimmer 328.