Institut für Analysis
Universität Karlsruhe
Roland Schnaubelt, Bernard Haak

Karlsruhe, den 29.11.06

Übungen zur Vorlesung

Funktionalanalysis (Wintersemester 2006/07)

Blatt 5

Aufgabe 17. (schriftlich, 8 Punkte)
Zeigen Sie für die folgenden Banachräume X und Y (versehen mit den üblichen Normen) und linearen Abbildungen T, dass T von X nach Y stetig ist, und berechnen Sie $\|T\|$.

(a) Es seien $X = c$, $Y = \mathbb{C}$ und $Tx = \lim_{n\to\infty} x_n$ für $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c$.

(b) Gegeben sind ein kompakter metrischer Raum K und ein stetiges $\varphi : K \to K$. Es seien $X = Y = C(K)$ und $Tf(t) = f(\varphi(t))$ für $t \in K$ und $f \in X$.

(c) Gegeben sind $a_{kl} \in \mathbb{C}$ $(k, l \in \mathbb{N})$ mit $\sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{l=1}^{\infty} |a_{kl}| < \infty$ und $a_{kl} \to 0$ für $k \to \infty$ und alle $l \in \mathbb{N}$. Es seien $X = Y = c_0$ und $(Tx)_k = \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} x_l$ für $k \in \mathbb{N}$ und $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$.

(d) Gegeben ist $\alpha \in (0, 1)$. Es seien $X = Y = C([0, 1])$ und $Tf(t) = \int_0^t (t - s)^{-\alpha} f(s)\, ds$ für $t \in [0, 1]$ und $f \in X$.

(e) Gegeben sind $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Es seien $X = C^1([0, 1])$, $Y = \mathbb{C}$ und $Tf = \alpha f(0) + \beta f'(0)$ für $f \in X$.

Aufgabe 18. (mündlich)
Zeigen Sie für die folgenden Banachräume X und Y und linearen Abbildungen T, dass T von X nach Ystetig ist.

(a) $X = L^1(\mathbb{R}^d)$, $Y = C_b(\mathbb{R}^d)$, und $Tf(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi\cdot x} f(x)\, dx$ für $\xi \in \mathbb{R}^d$ und $f \in X$, wobei $\xi \cdot x = \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n$.

(b) Gegeben sind $p, q \in (1, \infty)$ und $a_{kl} \in \mathbb{C}$ $(k, l \in \mathbb{N})$ mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big[\sum_{l=1}^{\infty} |a_{kl}|^{p'} \Big]^{\frac{q}{p'}} < \infty.$$

Es seien $X = \ell^p$, $Y = \ell^q$ und $(Tx)_k = \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} x_l$ für $k \in \mathbb{N}$ und $x = (x_n)_{n\in\infty} \in \ell^p$.

Aufgabe 19. (mündlich)
(a) Es seien (M, d) ein separabler metrischer Raum, $A \subset M$ und $f : M \to M'$ stetig und surjektiv für einen weiteren metrischen Raum (M', d'). Zeigen Sie, dass (A, d) und (M', d') auch separabel sind.
(b) Welche der Banachräume $C_b(\mathbb{R})$ und $C_0(\mathbb{R})$ sind separabel?

Abgabe der schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben bis Mittwoch, den 6.12.06, 15:30 Uhr, in den Einwurfschlitz ‘Funktionalanalysis’ neben Zimmer 328.