Institut für Analysis
Universität Karlsruhe
Roland Schnaubelt, Bernard Haak

Karlsruhe, den 6.12.06

Übungen zur Vorlesung

Funktionalanalysis (Wintersemester 2006/07)

Blatt 6

Aufgabe 20. (schriftlich, 4 Punkte)
Für die folgenden Banachräume X und Y finde man jeweils einen isometrischen Isomorphismus $T : X \to Y$.

(a) Seien $A \in \mathcal{L}_d$ und $w : A \to \mathbb{R}$ messbar mit $w(\xi) > 0$ für alle $\xi \in A$. Betrachte $X = L^2(A)$ mit der 2–Norm und $Y = L^2(A, w)$ mit der Norm $\|f\|_{2,w} = \|\sqrt{w}f\|_2$.
(b) Sei $S = \partial B(0, 1) \subset \mathbb{C}$. Betrachte $X = C(S)$ und $Y = \{f \in C([0, 2\pi]) : f(0) = f(2\pi)\}$ beide mit der Supremumsnorm.
(c) Seien $J \subset [0, 1]$ ein abgeschlossenes Intervall, $E = C([0, 1])$ mit der Supremumsnorm und $Z = \{f \in E : f = 0 \text{ auf } J\}$. Betrachte $X = E/Z$ mit der Quotientennorm und $Y = C(J)$ mit der Supremumsnorm.

Aufgabe 21. (schriftlich, 4 Punkte)
(a) Es sei X ein Prä–Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $(x|y)$ und $\{x_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von X. Man definiere induktiv $y_0 = x_0$, $y_n = x_n - \sum_{k=0}^{n-1} (x_n|b_k)b_k$ für $n \in \mathbb{N}$ und $b_n = \frac{1}{\|y_n\|} y_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass $y_n \neq 0$ für $n \in \mathbb{N}_0$, dass $\{b_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ ein Orthonormalsystem ist und dass $\mathrm{lin}\{b_n, n \in \mathbb{N}_0\} = \mathrm{lin}\{x_n, n \in \mathbb{N}_0\}$.
(b) Es seien $X = C([-1, 1], \mathbb{R})$, $(x|y) = \int_{-1}^{1} x(t)y(t)\, dt$ und $x_n(t) = t^n$ für $t \in [-1, 1]$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Man berechne für diesen Fall die Funktionen b_0, b_1, b_2 und b_3 aus Teil (a).

Aufgabe 22. (mündlich)
Für $\lambda \in \mathbb{R}$ setze man $f_\lambda(t) = e^{i\lambda t}$ $(t \in \mathbb{R})$. Es sei $X = \mathrm{lin}\{f_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$. Zeigen Sie, dass der Grenzwert

$$(f|g) := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\overline{g(t)}\, dt$$

für $f, g \in X$ existiert und ein Skalarprodukt auf X definiert. Ferner zeige man, dass die Vervollständigung $AP_2(\mathbb{R})$ von X bezüglich der Norm $(f|f)^{1/2}$ nicht separabel ist.

Aufgabe 23. (mündlich)
Zeigen Sie, dass $C([0, 1])$ mit der Supremumsnorm und $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ mit der Operatornorm keine Hilberträume sind. (Dabei ist $\mathbb{R}^2$ mit der 2–Norm versehen.)

Abgabe der schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben bis Mittwoch, den 13.12.06, 15:30 Uhr, in den Einwurfschlitz ‘Funktionalanalysis’ neben Zimmer 328.