Institut für Analysis
Universität Karlsruhe
Roland Schnaubelt, Bernard Haak

Karlsruhe, den 13.12.06

Übungen zur Vorlesung

Funktionalanalysis (Wintersemester 2006/07)

Blatt 7

Aufgabe 24. (schriftlich, 5 Punkte)
Man betrachte auf dem Hilbertraum $X = L^2([0, 2\pi])$ die Orthonormalbasis gegeben durch $b_n(t) = (2\pi)^{-1/2}e^{int}$ für $t \in [0, 2\pi]$ und $n \in \mathbb{Z}$. Es sei $f \in X$. Dann konvergiert die Fourierreihe $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(f|b_n)b_n$ in X und die Folge $\hat{f} = ((f|b_n))_{n\in\mathbb{Z}}$ liegt in $\ell^2(\mathbb{Z})$.
(a) Zeigen Sie, dass die Fourierreihe bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ gegen f konvergiert, wenn $\hat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z})$.
(b) Zeigen Sie, dass $\hat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ für $f \in C^1([0, 2\pi])$ mit $f(0) = f(2\pi)$.
(c) Berechnen Sie die Fourierreihe von $f(t) = (t - \pi)^2$, $t \in [0, 2\pi]$. Finden Sie eine reelle Darstellung dieser Reihe unter Verwendung der trigonometrischen Funktionen.
(d) Berechnen Sie die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}$ und $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}k^{-2}$.

Aufgabe 25. (schriftlich, 4 Punkte)
Es seien X ein Hilbertraum, A eine Teilmenge von X und U, V abgeschlossene Untervektoräume von X. Es seien P_U, bzw. P_V, die Orthogonalprojektionen auf U, bzw. V. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.
(a) $(A^\perp)^\perp = \overline{\text{lin}\, A}$.
(b) $U \subset V \iff V^\perp \subset U^\perp$.
(c) $U \subset V \iff P_U = P_V P_U$.
(d) $U \subset V \iff P_U = P_U P_V$.

Aufgabe 26. (mündlich)
Es seien $X = L^2([0, 1])$ und $J_{k,j} = [(j - 1)2^{-k}, j2^{-k})$ für $k \in \mathbb{N}$ und $j \in \{1, 2, \cdots, 2^k\}$. Man definiere $r_k(t) = 1$ für $t \in J_{k,j}$ und j ungerade und $r_k(t) = -1$ für $t \in J_{k,j}$ und j gerade, wobei $k \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gibt es eindeutig bestimmte $k \in \mathbb{N}$ und $l \in \{1, 2, \cdots, 2^k\}$ mit $n = 2^k + l$. Setze $h_n(t) = 2^{k/2}$ für $t \in J_{k+1,2l-1}$, $h_n(t) = -2^{k/2}$ für $t \in J_{k+1,2l}$ und $h_n(t) = 0$ sonst. Ferner sei $h_1 = \mathbf{1}$ und $h_2 = r_1$. (Skizzen!) Zeigen Sie, dass $R = \{r_k, k \in \mathbb{N}\}$ und $H = \{h_n, n \in \mathbb{N}\}$ Orthonormalsysteme in X sind, dass R keine Orthonormalbasis ist und dass H eine Orthonormalbasis ist.

Aufgabe 27. (mündlich)
Sei $X = C([-1, 1])$ mit dem Skalarprodukt $(f|g) = \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}\, dt$ versehen und $Y = \{f \in X : f(t) = 0 \ \ \forall t \in [0, 1]\}$. Zeigen Sie, dass Y ein abgeschlossener Untervektoraum von X ist (bezüglich $\|f\|_2$), berechnen Sie $Y^\perp$ in X und zeigen Sie, dass $Y \oplus Y^\perp \neq X$.

Abgabe der schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben bis Mittwoch, den 20.12.06, 15:30 Uhr, in den Einwurfschlitz 'Funktionalanalysis' neben Zimmer 328.