Institut für Analysis
Universität Karlsruhe
Roland Schnaubelt, Bernard Haak

Karlsruhe, den 20.12.06

Übungen zur Vorlesung

**Funktionalanalysis (Wintersemester 2006/07)**

Blatt 8

**Aufgabe 28.** (schriftlich, 6 Punkte)
(a) Sei $X = L^2(\mathbb{R})$. Es sei $m \in C_b(\mathbb{R})$ fest gegeben. Man zeige, dass $(Tf)(t) = m(t)f(t-1)$ (f.a. $t \in \mathbb{R}$, $f \in X$) einen Operator $T \in \mathcal{B}(X)$ definiert und man berechne $\|T\|$ und $T'$.
(b) Es sei $X$ ein unendlichdimensionaler Hilbertraum mit Orthonormalbasis $\{b_n, n \in \mathbb{N}\}$ und es sei $m \in \ell^\infty$ fest gegeben. Zeigen Sie, dass $Tx = \sum_{n=1}^\infty m_n\,(x|b_n)\,b_n$ für $x \in X$ einen Operator $T \in \mathcal{B}(X)$ definiert und berechnen Sie $\|T\|$ und $T'$.
(c) Es sei $X$ ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{B}(X)$. Zeigen Sie, dass $\|T'T\| = \|TT'\| = \|T\|^2$.

**Aufgabe 29.** (schriftlich, 2 Punkte)
Es seien $X$ und $Y$ Banachräume und die Abbildung $b : X \times Y \to \mathbb{K}$ sei linear in beiden Variablen (d.h., $b$ ist eine Bilinearform). Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.
(i) $b$ ist stetig.
(ii) Die Abbildungen $b^y : X \to \mathbb{K};\ x \mapsto b(x,y)$, bzw. $b_x : Y \to \mathbb{K};\ y \mapsto b(x,y)$, sind für alle $y \in Y$, bzw. $x \in X$, stetig.
(iii) Es gibt ein $c > 0$, so dass $|b(x,y)| \le c\,\|x\|\,\|y\|$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$.

**Aufgabe 30.** (mündlich)
(a) Zeigen Sie unter den Annahmen von Aufgabe 28(b), dass $\mathcal{B}(X)$ nicht separabel ist.
(b) Zeigen Sie, dass es keine vollständige Norm auf $c_{00}$ gibt.

**Aufgabe 31.** (mündlich)
Gegeben seien $\alpha_{n,j} \in \mathbb{R}$ und $t_{n,j} \in [0,1]$ für $n \in \mathbb{N}$ und $j \in \{0, 1, \cdots, n\}$, wobei $t_{n,j-1} < t_{n,j}$. Für $f \in X = C([0,1], \mathbb{R})$ setze man

$$q_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{n,j} f(t_{n,j}), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass $q_n \in X^*$ mit $\|q_n\| = \sum_{j=0}^n |\alpha_{n,j}|$ und dass genau dann $q_n(f) \to \int_0^1 f(t)\,dt$ $(n \to \infty)$ für alle $f \in X$, wenn

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j=0}^{n} |\alpha_{n,j}| < \infty \qquad \text{und} \qquad \exists \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \alpha_{n,j} t_{n,j}^m = \frac{1}{m+1} \qquad (\forall\, m \in \mathbb{N}_0).$$

Abgabe der schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben bis Mittwoch, den 10.1.07, 15:30 Uhr, in den Einwurfschlitz ‘Funktionalanalysis’ neben Zimmer 328.

*Wir wünschen Ihnen schöne Feiertage!*