Institut für Analysis
Universität Karlsruhe
Roland Schnaubelt, Bernard Haak

Karlsruhe, den 10.1.07

Übungen zur Vorlesung

**Funktionalanalysis (Wintersemester 2006/07)**

Blatt 9

**Aufgabe 32.** (schriftlich, 4 Punkte)
Gegeben seien $X = C([0,1])$, $m \in X$ und $\phi \in X$ mit $\phi([0,1]) \subset [0,1]$. Man definiere $T, S \in \mathcal{B}(X)$ durch $Tf = mf$ und $Sf = f \circ \phi$ und zeige, dass

(i) $T$ genau dann invertierbar ist, wenn $m(t) \neq 0$ für alle $t \in [0,1]$;
(ii) $S$ genau dann invertierbar ist, wenn $\phi : [0,1] \to [0,1]$ bijektiv ist.

Berechnen Sie ferner $T^{-1}, S^{-1} \in \mathcal{B}(X)$, falls diese existieren.

**Aufgabe 33.** (schriftlich, 4 Punkte)
(a) Für einen gegebenen Operator $T \in \mathcal{B}(c_0)$ definiere man $a_{kl} = (Te_l)_k$ für $k, l \in \mathbb{N}$. Man zeige, dass dann $a_{kl} \to 0$ für $k \to \infty$ und alle $l \in \mathbb{N}$ und dass $\sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{l=1}^{\infty} |a_{kl}| < \infty$. (Vergleiche Aufgabe 17(c).)
(b) Für $y \in \ell^1$ definiere man $\Phi(y) : \ell^\infty \to \mathbb{K}$ durch $[\Phi(y)](x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ für $x \in \ell^\infty$. Zeigen Sie, dass $\Phi$ eine isometrische Einbettung von $\ell^1$ nach $(\ell^\infty)^*$ ist.

**Aufgabe 34.** (mündlich)
Es seien $X$ ein Banachraum und $T_n, S_n, T, S \in \mathcal{B}(X)$, $n \in \mathbb{N}$, Operatoren mit $T_n x \to Tx$ und $S_n x \to Sx$ für $n \to \infty$ und alle $x \in X$. Zeigen Sie:

(a) $\|T\| \le \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$.
(b) $S_n T_n x \to STx$ für $n \to \infty$ und alle $x \in X$.
(c) Finden Sie $T_n$ mit $\|T_n\| = 1$ und $T_n x \to 0$ für $n \to \infty$ und alle $x \in X$. (Am besten sollten die Operatoren $T_n$ sogar invertierbar sein.)

**Aufgabe 35.** (mündlich)
Es sei $f \in X = L^1([0, 2\pi])$. Zeigen Sie, dass $\int_0^{2\pi} e^{int} f(t)\, dt$ für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert. (Hinweis: Man betrachte zuerst $f$ aus einem dichten Teilraum von $X$.)

**Aufgabe 36.** (mündlich)
Gegeben seien die charakteristischen Funktionen $f = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g = \mathbf{1}_{[0,1]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Berechnen Sie die gefalteten Funktionen $f * f$, $f * g$ und $g * g$.

Abgabe der schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben bis Mittwoch, den 17.1.07, 15:30 Uhr, in den Einwurfschlitz ‘Funktionalanalysis’ neben Zimmer 328.