Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2014
14.04.2014

Funktionentheorie

1. Übungsblatt

Abgabe bis Montag, den 28.04.2014, 12.00 Uhr, neben Raum 3A-03

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen.

(i) $z_1 = (4+3\mathrm{i})(2+\mathrm{i})$,

(ii) $z_2 = \frac{(1+\mathrm{i})^4}{(1-\mathrm{i})^3} + \frac{(1-\mathrm{i})^4}{(1+\mathrm{i})^3}$,

(iii) $z_3 = (\sqrt{3}+\mathrm{i})^{2014}$,

(iv) $z_4 = \frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}, \quad z \in \partial U_1(\mathrm{i})$.

b) Seien $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Betrachten Sie z und w in ihrer Polardarstellung und benutzen Sie die Additionstheoreme der reellen Sinus- und Kosinusfunktion, um die Multiplikation $z \cdot w$ geometrisch zu erklären.

Aufgabe 2 (K)

a) Finden Sie jeweils alle $z \in \mathbb{C}$, die die gegebene Gleichung lösen.

(i) $z^2 - 2z + 3 = 0$,

(ii) $z^2 - 2\overline{z} + 1 = 0$.

b) Skizzieren Sie folgende Teilmengen der komplexen Zahlenebene.

(i) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z+1+\mathrm{i}| = |z-3-3\mathrm{i}|\}$,

(ii) $\left\{z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\} \mid 0 < \operatorname{Arg} \frac{z+i}{z-i} < \frac{\pi}{4}\right\}$.

c) Sei $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1 \neq 0$ fest und die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch

$$z_{n+1} := \frac{1}{2}\left(z_n + \frac{1}{z_n}\right)$$

für $n \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie die Folge, in Abhängigkeit des Vorzeichens von x_1, auf Wohldefiniertheit und Konvergenz. Zwischen Nicht-Wohldefiniertheit und Divergenz muss dabei nicht unterschieden werden.
Hinweis: Man betrachte (je nach Vorzeichen) die Hilfsfolge $w_n := {}^{(z_n \mp 1)}\!/\!{}_{(z_n \pm 1)}$.

Aufgabe 3 (K)

a) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit, das Erfüllen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, relle bzw. komplexe Differenzierbarkeit sowie Holomorphie. Geben Sie, dort wo sie existiert, die Ableitung f' an.

(i) $f(z) = z \operatorname{Re} z$, (ii) $f(z) = \begin{cases} \frac{z^2}{|z|}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$

b) Sei f eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion mit $(\operatorname{Im} f)(z) = \cos(x)\sinh(y)$ für $z = x + iy$ und $f(0) = 0$. Bestimmen Sie $\operatorname{Re} f$. Betrachten Sie die Funktionswerte von f auf der reellen Achse, um eine Vermutung über den Ursprung dieser Funktion anzustellen.

c) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph auf $\mathbb{C}$. Zeigen Sie: Ist $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ oder $|f|$ konstant auf $\mathbb{C}$, so ist f konstant auf $\mathbb{C}$.
Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass aus $(\operatorname{Re} f)' \equiv 0$ bzw. $(\operatorname{Im} f)' \equiv 0$ auf $\mathbb{C}$ folgt, dass $\operatorname{Re} f$ bzw. $\operatorname{Im} f$ konstant auf $\mathbb{C}$ ist (vgl. Analysis 2).

Aufgabe 4

Für $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{C}$, M beschränkt, heißt $\operatorname{diam}(M) := \sup\{|w - z| \mid w, z \in M\}$ der Durchmesser von M. Zeigen Sie:

a) Ist $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots$ eine absteigende Folge nichtleerer, kompakter Teilmengen von $\mathbb{C}$, so ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$.

b) (Cantorscher Durchschnittssatz) Ist $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots$ eine absteigende Folge nichtleerer, kompakter Teilmengen von $\mathbb{C}$ mit $\operatorname{diam}(K_n) \to 0$ $(n \to \infty)$, so enthält $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ genau einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$.

Allgemeine Informationen

- `http://www.math.kit.edu/iana3/lehre/ft2014s/`.
- Sprechzeiten von Sebastian Schwarz: Mittwochs, 14-16 Uhr (Raum 3A-28) oder nach Vereinbarung per E-Mail (sebastian.schwarz2@kit.edu).

Übungsbetrieb

- Übungsblätter erscheinen am Tag der Übung auf oben genannter Seite und im entsprechenden Fach im 3. Stock des Allianzbaus.
- Die mit (K) versehenen Aufgaben können zur Korrektur neben Zimmer 3A-03 im Allianzbau eingeworfen werden (Name und Matrikelnummer nicht vergessen) und werden mit maximal 10 Punkten bewertet.
- Der Abgabetermin ist der Tag der folgenden Übung (mit Ausnahme der verschobenen Übung von Pfingstmontag) um 12 Uhr, die korrigierten Übungsblätter werden im entsprechenden Fach neben Zimmer 3A-15 ausgelegt.
- Studenten, die einen Übungsschein benötigen (z.B. Diplom, Lehramt), melden sich bitte entweder per E-Mail oder persönlich bei Sebastian Schwarz.
- Für den Erhalt eines Übungsscheines sind 40% der Gesamtpunktzahl (voraussichtlich 140 Punkte) hinreichend.

Klausur

- Eine schriftliche Prüfung findet am Montag, den 28.07.2014, von 12 bis 13 Uhr im Gerthsen-Hörsaal (Geb. 30.21) statt.
- Die Prüfungsnummer für Studierende der Mathematik (Bachelor, Lehramt) lautet 269, für Studierende der Physik 205. An der Prüfung interessierte Studenten anderer Fachrichtungen melden sich bitte entweder per E-Mail oder persönlich bei Sebastian Schwarz.
- Anmeldeschluss ist der 18.07.2014, Abmeldeschluss der 27.07.2014.