Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2014
28.04.2014

Funktionentheorie

2. Übungsblatt

Abgabe bis Montag, den 12.05.2014, 12.00 Uhr, neben Raum 3A-03

Aufgabe 5

a) Untersuchen Sie die folgende Potenzreihe auf punktweise Konvergenz. Beachten Sie dabei auch den Rand des Konvergenzkreises.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+1}.$$

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass

$$\sum_{n=0}^{N} a_n b_n = a_N \left(\sum_{n=0}^{N} b_n \right) + \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{n} b_k \right) (a_n - a_{n+1}), \qquad N \in \mathbb{N},$$

für komplexwertige Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

b) Beweisen Sie Lemma 3.1 der Vorlesung: Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, so ist D genau dann ein Gebiet, wenn D wegzusammenhängend ist, also zu zwei Punkten $z_1, z_2 \in D$ eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to D$ existiert mit $\gamma(0) = z_1$ und $\gamma(1) = z_2$.

Aufgabe 6

Sei $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie folgende Aussagen zur Darstellung der komplexen Sinus- und Kosinusfunktion sowie deren Nullstellen.

a) $\sin(z) = \sin(x)\cosh(y) + \mathrm{i}\cos(x)\sinh(y), \qquad \cos(z) = \cos(x)\cosh(y) - \mathrm{i}\sin(x)\sinh(y).$

b) $\sin(z) = 0 \Leftrightarrow z = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \qquad \cos(z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Folgern Sie daraus, dass beide Funktionen in $\mathbb{C}$ unbeschränkt sind.

Aufgabe 7 (K)

Sei $w = |w| \exp(\mathrm{i} \operatorname{Arg} w) \neq 0$. Zeigen Sie die folgenden Charakterisierungen der Logarithmen und n-ten Wurzeln von w.

a) Die Logarithmen von w sind gegeben durch

$$z_k = \log|w| + \mathrm{i}(\operatorname{Arg} w + 2k\pi), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

— bitte wenden —

Folgern Sie daraus, dass für $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $r > 0$ die Gleichung $e^{1/z} = w$ unendlich viele Lösungen z mit $|z| \leqslant r$ besitzt.

b) Die n verschiedenen n-ten Wurzeln von w sind gegeben durch

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} \exp\left(\mathrm{i}\frac{\operatorname{Arg} w + 2\pi k}{n}\right), \qquad 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Aufgabe 8

Durch die Definition des Hauptzweiges des Logarithmus können wir, in Konsistenz mit der entsprechenden Rechenregel im reellen Fall, den **Hauptzweig der allgemeinen Potenzen** definieren. Für $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ sei

$$z^\alpha := \exp(\alpha \operatorname{Log} z).$$

Für $\alpha = \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ lässt sich so der **Hauptzweig der n-ten Wurzel** definieren.

a) Wie lautet ein möglicher Definitionsbereich der Funktion $f(z) = z^n$, damit die eben definierte n-te Wurzel der Umkehrfunktion f^{-1} entspricht (vgl. Satz 4.2)?

b) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen.

(i) $z_1 = (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^{1/2}$, (ii) $z_2 = \mathrm{i}^{(\mathrm{i}^\mathrm{i})}$.

Aufgabe 9 (K)

Berechnen Sie die folgenden Wegintegrale.

a) $\int_\gamma z \operatorname{Re} z \, \mathrm{d}z$, wobei γ der Weg von 0 nach $1 + \mathrm{i}$ auf der Parabel $\{\operatorname{Im} z = (\operatorname{Re} z)^2\}$ ist,

b) $\int_\gamma |z|^2 \, \mathrm{d}z$, wobei γ den Rand des Dreiecks mit Eckpunkten 0,1 und i ein Mal gegen den Uhrzeigersinn durchläuft,

c) $\int_\gamma z^k \, \mathrm{d}z$, wobei $k \in \mathbb{Z}$, $\gamma(t) = Re^{\mathrm{i}t}$ für $t \in [0, 2\pi]$ und ein $R > 0$,

d) $\int_\gamma \frac{\exp(z)-1}{z} \, \mathrm{d}z$, wobei $\gamma(t) = e^{\mathrm{i}t}$ für $t \in [0, 2\pi]$,

e) $\int_\gamma \bar{z}^2 \, \mathrm{d}z$, wobei $\gamma(t) = e^{\mathrm{i}t} \sin(t)$ für $t \in [0, T]$ mit $T > 0$ so, dass $\mathrm{L}(\gamma) = \pi/2$.