Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2014
12.05.2014

# Funktionentheorie

## 3. Übungsblatt

Abgabe bis Montag, den 26.05.2014, 12.00 Uhr, neben Raum 3A-03

### Aufgabe 10 (K)

**a)** Beweisen Sie das Lemma von Jordan: Ist $f$ stetig auf $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geqslant 0, |z| \geqslant R_0\}$ für ein $R_0 > 0$ sowie entweder

(i) $\alpha > 0$ und $\lim_{R\to\infty} \max_{|z|=R, \operatorname{Im} z \geqslant 0} |f(z)| = 0$, oder

(ii) $\alpha = 0$ und $\lim_{R\to\infty} R \cdot \max_{|z|=R, \operatorname{Im} z \geqslant 0} |f(z)| = 0$,

so gilt

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z) e^{i\alpha z} \, dz = 0, \quad \gamma_R(t) = Re^{it}, t \in [0, \pi].$$

**b)** Zeigen Sie: Ist $g$ differenzierbar in $z_0 \in \mathbb{C}$ sowie stetig in $U_r(z_0)$ für ein $r > 0$, dann gilt

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{g(z)}{z - z_0} \, dz = i\pi g(z_0), \quad \gamma_\varepsilon(t) = z_0 + \varepsilon e^{it}, t \in [0, \pi].$$

*Hinweis:* Zeigen Sie zuerst $i\pi = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{z-z_0} \, dz$.

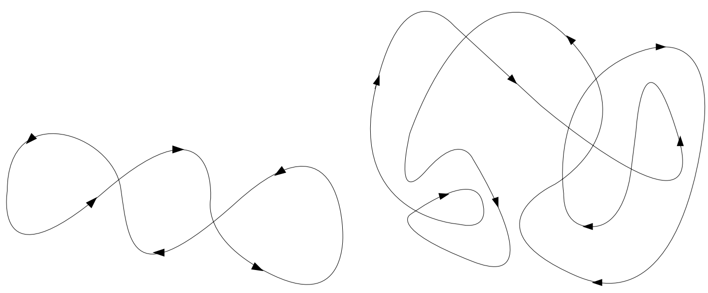
### Aufgabe 11

**a)** Sei $\gamma$ ein geschlossener Weg, der einen Kreis $U_R(z_0)$ in zwei Mengen $U_l$ (links des Weges) und $U_r$ (rechts des Weges) zerteile. Zeigen Sie, dass

$$n(\gamma, z_l) = n(\gamma, z_r) + 1$$

für alle $z_l \in U_l$, $z_r \in U_r$.

**b)** Bestimmen Sie für die folgenden zwei Wege $\gamma$ jeweils die Umlaufzahl $n(\gamma, z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$.



**c)** Zeigen Sie, dass eine offene Menge $D \in \mathbb{C}$ höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten besitzt.

## Aufgabe 12

Ziel dieser Aufgabe ist es, den Wert des uneigentlichen Riemann-Integrals

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

mit Hilfe der bisher verfügbaren Techniken der Funktionentheorie zu berechnen. Hierfür seien für $R, \varepsilon > 0$ die folgenden Wege definiert.

$$\gamma_{1,\varepsilon,R}(t) = t,\ t \in [\varepsilon, R], \qquad \gamma_{2,R}(t) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t},\ t \in [0,\pi],$$
$$\gamma_{3,\varepsilon,R}(t) = t,\ t \in [-R, -\varepsilon], \qquad \gamma_{4,\varepsilon}(t) = \varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}t},\ t \in [0,\pi].$$

Betrachten Sie nun die Funktion $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}$ und finden Sie anhand obiger Wege einen Weg, für den Sie den Cauchyschen Integralsatz anwenden können. Führen Sie dann den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ und $R \to \infty$ unter Zuhilfenahme von **Aufgabe 10** durch.
*Hinweis:* Die Aussage des Cauchyschen Integralsatzes gilt wortwörtlich, wenn das konvexe Gebiet durch ein **sternförmiges Gebiet** ersetzt wird, mit leicht modifiziertem Beweis: Ein Gebiet $G$ heißt **sternförmig**, falls es einen Punkt $z_0 \in G$ (genannt **Zentrum**) gibt, sodass $[z_0, z] \subseteq G$ für alle $z \in G$.

## Aufgabe 13 (K)

Wir möchten die Fresnel-Integrale

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \int_0^\infty \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$$

berechnen. Seien dazu für $R > 0$ die drei Wege

$$\gamma_{1,R}(t) = t, \qquad \gamma_{2,R}(t) = R + \mathrm{i}t, \qquad \gamma_{3,R}(t) = t(\mathrm{i}+1),$$

gegeben, jeweils mit $0 \leqslant t \leqslant R$.

**a)** Beweisen Sie die Gleichung

$$\int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_{1,R}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{2,R}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z.$$

**b)** Zeigen Sie mittels geeigneter Abschätzungen, dass

$$\int_{\gamma_{2,R}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z \to 0 \qquad \text{für } R \to \infty.$$

**c)** Berechnen Sie nun den Wert der Fresnel-Integrale, indem Sie in **a)** den Grenzübergang $R \to \infty$ betrachten und dabei $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ verwenden.