Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2014
26.05.2014

Funktionentheorie

4. Übungsblatt

Abgabe bis Dienstag, den 10.06.2014, 12.00 Uhr, neben Raum 3A-03

Aufgabe 14 (K)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\gamma_r} \frac{\sin(\pi z)}{(z^2+1)(2z+1)}\,\mathrm{d}z$$

mit $\gamma_r(t) = re^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$, wobei $r > 0$ beliebig gewählt sei, sodass das Integral wohldefiniert ist.

b) Die Funktion f sei gegeben durch

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{\cos(z)}} \operatorname{Log}(\mathrm{i}z - 1)}{z + 4(\mathrm{i}+1)}.$$

Wie lautet der Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung von f mit Entwicklungspunkt $z_0 = -2 - 3\mathrm{i}$?

c) Sei z_0 in $\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ und $f(z) = \operatorname{Log}(z)$ für $z \in \mathbb{C}_-$. Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung von f um z_0 und folgern Sie, dass es Werte für z_0 gibt, sodass dieser Konvergenzradius strikt größer ist als der Radius der größten offenen Kreisscheibe um z_0, die noch in $\mathbb{C}_-$ liegt.

Aufgabe 15

a) Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $L \subseteq \mathbb{C}$ eine Gerade und $f \in C(D) \cap H(D \setminus L)$. Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Morera, dass $f \in H(D)$.

b) Existiert eine Funktion $f \in H(\mathbb{C})$, sodass $f\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$?

Aufgabe 16 (K)

a) Beweisen oder widerlegen Sie: Es existiert genau eine Funktion $f \in H(\mathbb{C})$ mit

(i) $f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k^4} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(ii) $f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{|k|^5} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(iii) $f(k) = k^2 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

(iv) $f\left(\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right) = \left(4 - \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

b) Bestimmen Sie alle Werte von $z \in \mathbb{C}$, für die die folgende Funktion nicht definiert ist.

$$f(z) = \frac{\sin\left(\frac{1}{z}\right)\left(e^{z-i} - 1\right)^2}{(z-3)^5(z-i)\cos\left(\frac{1}{z+1}\right)\left(z - \frac{1}{\pi}\right)}.$$

Klassifizeren Sie alle isolierten Singularitäten, die sich unter diesen Werten befinden. Geben Sie nun noch alle Nullstellen der Funktion oder ihrer holomorphen Fortsetzung an. Bestimmen Sie bei Polen und Nullstellen auch deren Ordnung.
Hinweis: Sie dürfen **Aufgabe 17** benutzen.

Aufgabe 17

Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f, g \in H(D)$ nicht konstant Null und $z_0 \in D$ eine Nullstelle der Ordnung $n \in \mathbb{N}_0$ bzw. $m \in \mathbb{N}$ von f bzw. g (Ordnung 0 für f bedeutet, dass f in z_0 keine Nullstelle besitzt). Sei zudem $h(z) := \frac{f(z)}{g(z)}$ für alle $z \in D \setminus Z(g)$. Zeigen Sie

a) Ist $n \geqslant m$, so besitzt die Funktion h in z_0 eine hebbare Singularität, in der sie durch

$$h(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(m)}(z_0)}{g^{(m)}(z_0)}$$

holomorph fortgesetzt wird. Diese Fortsetzung hat in z_0 eine Nullstelle der Ordnung $n - m$.

b) Ist $n < m$, so besitzt h in z_0 einen Pol der Ordnung $m - n$.