Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2014
06.06.2014

# Funktionentheorie

## 5. Übungsblatt

Abgabe bis Montag, den 23.06.2014, 12.00 Uhr, neben Raum 3A-03

### Aufgabe 18 (K)

**a)** Berechnen Sie das Integral

$$\int_\gamma \frac{e^{i\pi z^2}}{(z-2i)^3}\, dz$$

für $\gamma(t) = 2 + 3e^{it}$ mit $t \in [0, 4\pi]$.

**b)** Werten Sie die folgenden beiden Integrale aus.

(i) $\int_0^{2\pi} e^{e^{2it}-3it}\, dt$, (ii) $\int_0^{2\pi} \cos^{2n}(t)\, dt$ für $n \in \mathbb{N}$.

*Hinweis:* Zeigen Sie zunächst, dass $\int_0^{2\pi} f(e^{it})\, dt = \int_\gamma \frac{f(z)}{iz}\, dz$ für $f \in C(\partial\mathbb{D})$ und $\gamma(t) = e^{it}$ mit $t \in [0, 2\pi]$.

**c)** Zeigen Sie ohne die Sätze von Picard: Für eine nicht-konstante, ganze Funktion $f$ gilt, dass $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$.

### Aufgabe 19

**a)** Beweisen Sie ohne die Sätze von Picard: Ist $f$ ganz mit $\operatorname{Re} f(z) \leqslant M$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so ist $f$ konstant.

**b)** Zeigen Sie, dass keine Funktion $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ mit $|f(z)| \geqslant \frac{1}{\sqrt{|z|}}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existiert.

**c)** (siehe **Aufgabe 3 c)**) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Zeigen Sie: Ist $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ oder $|f|$ konstant auf $G$, so ist $f$ konstant auf $G$.

**d)** Zeigen Sie die folgende Verallgemeinerung des Satzes von Liouville: Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Die ganze Funktion $f$ ist genau dann ein Polynom vom Grad höchstens $n$, wenn Konstanten $a, b > 0$ existieren mit

$$|f(z)| \leqslant a + b\,|z|^n \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

## Aufgabe 20

Nach dem Satz von Liouville ist jede ganze, nicht-konstante Funktion unbeschränkt. Es gibt jedoch sehr wohl Funktionen, die in Richtung jedes von Null ausgehenden Strahls beschränkt sind und sogar gegen Null konvergieren. Solch eine Funktion wollen wir nun konstruieren. Sei dazu

$$f(z) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{zt}}{t^t}\,\mathrm{d}t, \quad g(z) = f(z - 2\pi\mathrm{i}),$$

jeweils für alle $z \in \mathbb{C}$, und

$$h(z) = \begin{cases} \frac{g(z)-g(0)}{z}, & z \neq 0, \\ g'(0), & z = 0. \end{cases}$$

$h$ soll unsere Forderung erfüllen. Das Vorgehen ist wie folgt.

**a)** Die Funktion $f$ ist wohldefiniert für alle $z \in \mathbb{C}$. Unter Verwendung des Satzes von Fubini ist $f$ nach dem Satz von Morera überdies holomorph.

**b)** Auf der Menge $\{|\operatorname{Im} z| > \pi\}$ ist $f$ beschränkt. Genauer sei $\operatorname{Im} z = \pm\frac{\pi}{2} \pm c$ für ein $c > 0$, dann gilt $|f(z)| \leqslant \frac{1}{c}$. Dazu schreiben wir das Integral als Limes und benutzen einen Viertelkreis (vgl. **Aufgabe 12**), um die Abschätzung mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes zu erreichen. Der Viertelkreis liegt im ersten bzw. vierten Quadranten, je nach Vorzeichen von $\operatorname{Im} z$.

**c)** Die Beschränktheit verschiebt sich durch die Definition von $g$, sodass sie in Richtung jedes erwähnten Strahls gilt. Die Definition von $h$ verwandelt die Beschränktheit in eine Konvergenz gegen Null.

## Aufgabe 21 (K)

**a)** Bestimmen Sie jeweils das Maximum und Minimum des Betrages der folgenden Funktionen auf der Menge $\overline{\mathbb{D}}$.

(i) $f_1(z) = \mathrm{e}^{z^2}$, (ii) $f_2(z) = z^2 + \mathrm{i}z + 1$, (iii) $f_3(z) = \frac{z-2}{z+2\mathrm{i}}$.

*Hinweis für (iii):* Es reicht aus , das Maximum vom Minimum zu unterscheiden und beide in einer Form anzugeben, die sich mit Hilfe eines einfachen Taschenrechners berechnen lässt.

**b)** Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\overline{\mathbb{D}} \subseteq G$. Beweisen Sie: Ist $|f|$ konstant auf $\partial\mathbb{D}$, $f$ jedoch nicht konstant auf $G$, so besitzt $f$ mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{D}$.

**c)** Seien $f, g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ bijektiv mit $f, g \in H(\mathbb{D})$ sowie $f(0) = g(0) = 0$ und entweder $f'(0) = g'(0)$ oder $f(z_0) = g(z_0)$ für ein $z_0 \neq 0$. Zeigen Sie, dass $f(z) = g(z)$ für alle $z \in \mathbb{D}$.
*Hinweis:* Betrachten Sie die Funktionen $g^{-1} \circ f$ und $f^{-1} \circ g$.