

## FUNKTIONENTHEORIE

### 6. ÜBUNGSBLATT

Abgabe bis Montag, den 07.07.2014, 12.00 Uhr, neben Raum 3A-03

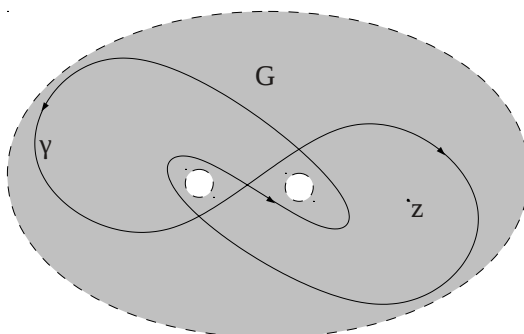
#### AUFGABE 22 (K)

- a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} z < \pi/2\} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = z \sin(z)$$

auf ihrem Definitionsbereich injektiv ist.

- b) Seien  $G \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $\gamma$  ein einfach durchlaufener Weg in  $G$  und  $z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$ , alles entsprechend nachfolgendem Bild.



Sei zudem  $f \in H(G)$ . Berechnen Sie (mit Begründung)

$$\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

#### AUFGABE 23 (K)

- a) Es sei  $\Omega$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet,  $f \in H(\Omega)$  und  $f \not\equiv 0$ . Zeigen Sie, dass  $f$  genau dann einen holomorphen Logarithmus besitzt, wenn  $f$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  eine holomorphe  $n$ -te Wurzel besitzt.
- b) Finden Sie alle Paare ganzer Funktionen  $f$  und  $g$  mit  $f^2 + g^2 = 1$ .  
*Hinweis:* Benutzen Sie Satz 10.4 und die Faktorisierung  $f^2 + g^2 = (f + ig)(f - ig)$ .

*Zusatz:* Beweisen Sie a) ohne die Voraussetzung, dass das Gebiet  $\Omega$  einfach zusammenhängend ist.