Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2014
07.07.2014

Funktionentheorie

7. Übungsblatt

Keine Abgabe, Besprechung in der Übung am Montag, den 14.07.2014.

Aufgabe 24

a) Beweisen Sie: Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und hat eine Funktion $f \in H(D \setminus \{z_0\})$ in $z_0 \in D$ einen Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} g^{(m-1)}(z),$$

wobei g die holomorphe Fortsetzung der Funktion $z \mapsto (z - z_0)^m f(z)$ ist.

b) Berechnen Sie

$$\int_\gamma \frac{1}{(\mathrm{e}^z - 1)(z-1)^2} \, \mathrm{d}z$$

für den Weg $\gamma(t) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Aufgabe 25

a) Wie viele Nullstellen hat die Funktion

$$f(z) = z^4 - 3z + 1$$

in $\mathbb{D}$? Berechnen Sie mit Hilfe dieser Information das Integral

$$\int_\gamma \frac{4z^3 - 3}{z^4 - 3z + 1} \, \mathrm{d}z$$

für den Weg $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$.

b) Wie viele Nullstellen hat die Funktion

$$f(z) = z^4 + z^3 - 4z + 1$$

in der Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 3\}$?

— bitte wenden —

Aufgabe 26

a) Seien P und Q Polynome, wobei der Grad von Q um mindestens zwei größer sei als der Grad von P. Die Funktion

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

habe auf der reellen Achse keine Pole. Beweisen Sie, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{Res}(f,z).$$

b) Zeigen Sie, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{n\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 27

a) Seien P und Q Polynome in zwei Variablen, $R := \frac{P}{Q}$ und die Funktion

$$t \mapsto R(\cos(t), \sin(t))$$

sei stetig (fortsetzbar) auf $[0, 2\pi]$ (was z.B. der Fall ist, falls Q auf $\{x, y \in \mathbb{R} \mid x^2+y^2 = 1\}$ nullstellenfrei ist). Sei außerdem

$$f(z) := \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right).$$

Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t))\,\mathrm{d}t = 2\pi \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k),$$

wobei $z_1, \ldots, z_n$ die Pole von f in $\mathbb{D}$ seien.

b) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^4(t)}{1+\cos(t)}\,\mathrm{d}t = \pi.$$