Funktionentheorie

1. Übung

Definition 1

Wir fassen $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ als Körper $\mathbb{C}$ auf, indem wir $z = (x,y), w = (u,v) \in \mathbb{R}^2$ wie folgt verknüpfen.

$$z + w := (x+u, y+v), \qquad z \cdot w := (xu - yv, yu + xv).$$

Nun betrachten wir $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$, indem wir $x \in \mathbb{R}$ mit $(x,0) \in \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ identifizieren. Zudem definieren wir $\mathrm{i} := (0,1)$. Somit schreiben wir $(x,y) \in \mathbb{C}$ als

$$(x,y) = (x,0) + (y,0) \cdot (0,1) = x + \mathrm{i}y.$$

Zuletzt definieren wir zu $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ den <u>Realteil</u> $\operatorname{Re} z := x$, den <u>Imaginärteil</u> $\operatorname{Im} z := y$ (beides reelle Zahlen), das <u>komplex Konjugierte</u> $\overline{z} := x - \mathrm{i}y$ und den <u>Betrag</u> $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$.

Bemerkung 2

a) *Es gilt*

$$\mathrm{i}^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1,$$

womit die Rechenvorschrift der komplexen Multiplikation $z \cdot w$ sich zum standardmäßigen Ausmultiplizieren von $(x + \mathrm{i}y)(u + \mathrm{i}v)$ vereinfacht unter Verwendung von $\mathrm{i}^2 = -1$.

b) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z})$, $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z \overset{\pm}{\cdot} w} = \overline{z} \overset{\pm}{\cdot} \overline{w}$.

c) *Betrag einer komplexen Zahl $\widehat{=}$ Euklidischen Norm des zugehörigen Vektors in $\mathbb{R}^2$. Insbesondere ist der komplexe Betrag eine Norm auf $\mathbb{C}$, erfüllt also z.B. die Dreiecksungleichungen sowie $|z \cdot w| = |z||w|$. Zudem gilt*

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = z \cdot \overline{z}, \quad \textit{also} \quad z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2},$$

und

$$|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leqslant |z| \leqslant \sqrt{2} \max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\}.$$

Definition 3

Eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen <u>konvergiert gegen $z_0 \in \mathbb{C}$</u>, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$|z_n - z_0| < \varepsilon \qquad \forall n \geqslant N.$$

Bemerkung 4

*Wegen Bem. 2 **c)**: $z_n \to z_0$ für $n \to \infty \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z_0$ und $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z_0$ für $n \to \infty$. Deshalb gelten die üblichen Rechenregeln (Summe, Differenz, Produkt, Betrag, Konjugiertes, Inverses).*

Definition 5

Aus einer Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen lässt sich eine neue Folge, die Folge der Partialsummen $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} z_k \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

bilden. Diese Folge heißt auch die der Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zugeordnete Reihe. Konvergiert diese Folge, so spricht man vom Reihenwert $S := \lim_{n\to\infty} S_n$ und schreibt auch $S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$. Die Reihe heißt absolut konvergent, falls die Reihe der Beträge $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Bemerkung 6

Absolute Konvergenz $\Rightarrow$ Konvergenz. Es gelten die üblichen Konvergenzkriterien (Quotienten-, Wurzel-, Majoranten-, Minorantenkriterium). Reicht dies nicht aus, kann man die Reihe in ihren Real- und Imaginärteil auftrennen, um z.B. das Leibnitzkriterium anwenden zu können.

Definition 7

Für $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ sei

$$U_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$$

die offene Kreisscheibe um z_0 mit Radius r. Analog definiere durch

$$\overline{U_r(z_0)} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leqslant r\}$$

die abgeschlossene Kreisscheibe um z_0 mit Radius r. $\dot{U}_r(z_0) := U_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ bezeichnet die punktierte Kreisscheibe um z_0 mit Radius r

Definition 8

Sei $A \subseteq \mathbb{C}$.

a) *$z_0 \in \mathbb{C}$ heißt Häufungspunkt von A, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $z_\varepsilon \in \dot{U}_\varepsilon(z_0)$ existiert.*

b) *$A^\circ := \{z \in A \mid \exists r > 0 : U_r(z) \subseteq A\}$ heißt Inneres von A. A heißt offen, falls $A^\circ = A$.*

c) *$\overline{A} := \{z \in \mathbb{C} \mid \exists (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A : z_n \to z, n \to \infty\}$ heißt Abschluss von A. A heißt abgeschlossen, falls $\overline{A} = A$.*

d) *$\partial A := \overline{A} \setminus A^\circ$ heißt Rand von A.*

e) *A heißt beschränkt, falls ein $R \geqslant 0$ existiert mit $|z| < R$ für alle $z \in A$.*

f) *A heißt kompakt, falls für jede Überdeckung von A durch offene Mengen $(O_i)_{i\in I}$ (I beliebige Indexmenge) eine endliche Teilüberdeckung existiert.*

Bemerkung 9

a) *Nach Bemerkung 2* ***c)*** *sind die beiden vorherigen Definitionen genau dieselben wie in* $\mathbb{R}^2$.

b) *A abgeschlossen* $\Leftrightarrow A^c := \mathbb{C} \setminus A$ *offen.*

c) $A \subseteq \mathbb{C}$ *ist kompakt* $\Leftrightarrow$ *Jede Folge in A hat eine in A konvergente Teilfolge* $\Leftrightarrow$ *A ist abgeschlossen und beschränkt.*

Definition 10

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$, z_0 *ein Häufungspunkt von D,* $f : D \to \mathbb{C}$ *eine Funktion. Wenn es ein* $y_0 \in \mathbb{C}$ *gibt, für welches zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *existiert, sodass aus* $z \in \dot{U}_\delta(z_0) \cap D$ *folgt, dass* $f(z) \in U_\varepsilon(y_0)$, *so definiere*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) := y_0.$$

Gilt $z_0 \in D$ *und* $f(z_0) = y_0$, *so heißt f stetig in* z_0. *Ist D offen, so heißt f stetig auf D, falls f stetig in z ist für alle* $z \in D$.

Bemerkung 11

a) *Wie im Reellen sind unter entsprechenden Voraussetzungen die Summe/Differenz, das Produkt, der Quotient und die Komposition zweier stetiger Funktionen stetig.*

b) *f ist stetig in* $z_0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} f$ *und* $\operatorname{Im} f$ *sind stetig in* z_0. *Dabei ist z.B.* $\operatorname{Re} f$ *definiert durch* $(\operatorname{Re} f)(z) := \operatorname{Re}(f(z))$.

Definition 12

a) *Sei* $I \subseteq \mathbb{R}$ *ein Intervall und* $\gamma : I \to \mathbb{C}$ *eine Funktion. Dann heißt γ <u>differenzierbar auf I</u>* $:\Leftrightarrow \operatorname{Re}\gamma, \operatorname{Im}\gamma : I \to \mathbb{R}$ *differenzierbar auf I. In diesem Fall ist*

$$\gamma'(t) := (\operatorname{Re}\gamma)'(t) + (\operatorname{Im}\gamma)'(t) \qquad \forall t \in I$$

und es gelten die üblichen Rechenregeln.

b) *Sei* $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ *und* $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ *eine Funktion. f heißt <u>Riemann-integrierbar</u>* $:\Leftrightarrow \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrierbar. In diesem Fall ist*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := \int_a^b (\operatorname{Re} f)(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b (\operatorname{Im} f)(t)\,\mathrm{d}t$$

und es gelten die üblichen Rechenregeln, z.B. auch $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

<u>**Fazit:**</u> Alle in dieser Übung angesprochenen Fakten über komplexe Zahlen, Folgen, Reihen, Mengen und Funktionen lassen sich direkt von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^2$ (durch Aufteilen in Real- und Imaginärteil) auf $\mathbb{C}$ übertragen.
Aber: Die Differenzierbarkeit von Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$ mit $D \subseteq \mathbb{C}$ offen unterscheidet sich substanziell von der Differenzierbarkeit in $\mathbb{R}^2$ und bildet die Grundlage der Funktionentheorie (siehe erste Vorlesung)!