Aufgabe 1 Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und seien $p, q, r, p_1, \ldots, p_N \in [1, \infty]$ und $f, g, h_1, \ldots, h_N \colon X \to \mathbb{K}$ messbar für ein $N \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

a) Ist $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, $f \in L^p(X, \mu)$ und $g \in L^q(X, \mu)$, so ist $f \cdot g \in L^r(X, \mu)$ mit

$$\|f \cdot g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

b) Gilt $\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_N}$ und $h_n \in L^{p_n}(X, \mu)$ für $n = 1, \ldots, N$, so ist $h_1 \cdot \ldots \cdot h_N \in L^r(X, \mu)$ mit

$$\|h_1 \cdot \ldots \cdot h_N\|_{L^r} \leq \|h_1\|_{L^{p_1}} \cdot \ldots \cdot \|h_N\|_{L^{p_N}}.$$

c) Seien $p < r < q$ und $f \in L^p(X, \mu) \cap L^q(X, \mu)$. Dann ist auch $f \in L^r(X, \mu)$ mit

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^{\theta} \|f\|_{L^q}^{1-\theta},$$

wobei $\theta \in (0, 1)$ durch $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$ gegeben ist.

Sei nun $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \sum_{n \geq 1} \delta_{\{n\}})$, d.h. $L^p(X, \mu) = \ell^p$. Zeigen Sie:

d) Für $x = (x_n)_{n=1}^N \in \mathbb{K}^N$ und $p \leq q$ gilt

$$\|x\|_{\ell^p} \leq N^{1/p - 1/q} \|x\|_{\ell^q}.$$

e) Für $x = (x_n)_{n \geq 1} \in \ell^q$ und $p \geq q$ gilt

$$\|x\|_{\ell^p} \leq \|x\|_{\ell^q}.$$

Lösungsvorschlag: a) Ist $r = \infty$, so folgt auch $p = q = \infty$. Wir zeigen für diesen Fall zunächst zwei allgemein bekannte Hilfsaussagen:

(i) Falls $|f(x)| \leq C$ für μ-fast alle $x \in X$, so gilt auch $\|f\|_{L^\infty} \leq C$;

(ii) $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty}$ für μ-fast alle $x \in X$.

Zu (i): Wir wiederholen kurz die Definition des wesentlichen Supremums. Es gilt

$$\|f\|_{L^\infty} := \inf\big\{r \geq 0 \colon \mu(|f| > r) = 0\big\} = \inf\big\{r \geq 0 \colon |f| \leq r \ \mu\text{-fast überall}\big\}.$$

Falls $|f| \leq C$ μ-fast überall, so ist $\{|f| > C\}$ eine Nullmenge, d.h. per Definition ist $\|f\|_{L^\infty} \leq C$.

Zu (ii): Sei $\|f\|_{L^\infty} < \infty$ (sonst ist die Behauptung trivial). Dann existiert nach Definition der L^∞-Norm und des Infimums zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $r_n \in \{r \geq 0 \colon \mu(|f| > r) = 0\}$ sodass $r_n < \|f\|_{L^\infty} + \frac{1}{n}$. Dann gilt aber auch

$$0 \leq \mu\big(|f| > \|f\|_{L^\infty} + \tfrac{1}{n}\big) \leq \mu\big(|f| > r_n\big) = 0,$$

d.h. $\{|f| > \|f\|_{L^\infty} + \frac{1}{n}\}$ ist eine Nullmenge und damit auch

$$\big\{|f| > \|f\|_{L^\infty}\big\} = \bigcup_{n \geq 1} \big\{|f| > \|f\|_{L^\infty} + \tfrac{1}{n}\big\}.$$

Dies heißt aber gerade $|f| \leq \|f\|_{L^\infty}$ μ-fast überall.

Für $f, g \in L^\infty(X,\mu)$ erhalten wir dann nach (ii)

$$|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq \|f\|_{L^\infty}\|g\|_{L^\infty} \quad \mu\text{-fast überall},$$

und mit (i) erhalten wir schließlich die Behauptung.

Sei nun $r < \infty$. Dann ist $|f|^r \in L^{p/r}(X,\mu)$ und $|g|^r \in L^{q/r}(X,\mu)$ und mit der Ungleichung von Hölder erhalten wir wegen $1 = \frac{1}{p/r} + \frac{1}{q/r}$

$$\|f \cdot g\|_{L^r} = \big\||f|^r \cdot |g|^r\big\|_{L^1}^{1/r} \leq \big\||f|^r\big\|_{L^{p/r}}^{1/r}\big\||g|^r\big\|_{L^{q/r}}^{1/r} = \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

Da $f \cdot g$ messbar ist, folgt damit $f \cdot g \in L^r(X,\mu)$.

b) Wir beweisen die Behauptung mit vollständiger Induktion. Der Induktionsanfang wurde bereits in a) für $N = 2$ gemacht. Nehmen wir also für den Moment an, dass die Behauptung für ein fixiertes $N \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ wahr sei. Sei $\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_{N+1}}$ und definiere $\widetilde{r} \in [1,\infty]$ durch $\frac{1}{\widetilde{r}} := \frac{1}{r} - \frac{1}{p_{N+1}}$. Beachte dass nach Voraussetzung $r \leq p_{N+1}$ und damit $\widetilde{r}$ wohldefiniert ist. Dann gelten

$$\frac{1}{\widetilde{r}} = \frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_N} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{\widetilde{r}} + \frac{1}{p_{N+1}}.$$

Nach Induktionsannahme ist $h_1 \cdot \ldots \cdot h_N \in L^{\widetilde{r}}(X,\mu)$ und wir erhalten nach a) und Induktionsannahme

$$\begin{aligned}\|h_1 \cdot \ldots \cdot h_N \cdot h_{N+1}\|_{L^r} &\leq \|h_1 \cdot \ldots h_N\|_{L^{\widetilde{r}}}\|h_{N+1}\|_{L^{p_{N+1}}} \\ &\leq \|h_1\|_{L^{p_1}} \cdot \ldots \cdot \|h_N\|_{L^{p_N}} \cdot \|h_{N+1}\|_{L^{p_{N+1}}}.\end{aligned}$$

Da $h_1 \cdot \ldots \cdot h_{N+1}$ messbar ist, folgt hieraus die gewünschte Behauptung für $N+1$.

c) Nach Voraussetzung ist f messbar. Es genügt also die Norm-abschätzung zu zeigen. Beachte, dass $|f|^\theta \in L^{p/\theta}(X,\mu)$ und $|f|^{1-\theta} \in L^{q/1-\theta}(X,\mu)$. Wegen $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q} = \frac{1}{p/\theta} + \frac{1}{q/1-\theta}$ folgt mit Teil a)

$$\|f\|_{L^r} = \big\||f|^\theta|f|^{1-\theta}\big\|_{L^r} \leq \big\||f|^\theta\big\|_{L^{p/\theta}}\big\||f|^{1-\theta}\big\|_{L^{q/1-\theta}} = \|f\|_{L^p}^\theta\|f\|_{L^q}^{1-\theta}.$$

d) Sei $r \in [1,\infty]$ definiert durch $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Dann gilt für $\mathbf{1} := (1,\ldots,1) \in \mathbb{K}^N$ gerade

$$\|\mathbf{1}\|_{\ell^r} = \Big(\sum_{n=1}^N |1|^r\Big)^{1/r} = N^{1/r}.$$

Wegen $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ folgt dann mit Teil a)

$$\|x\|_{\ell^p} = \|\mathbf{1} \cdot x\|_{\ell^p} \leq \|\mathbf{1}\|_{\ell^r}\|x\|_{\ell^q} = N^{1/r}\|x\|_{\ell^q} = N^{1/p - 1/q}\|x\|_{\ell^q}.$$

e) Sei ohne Einschränkung $x \neq 0$ und $p > q$ (sonst ist die Behauptung trivial).

<u>1. Fall: $p = \infty$:</u> Dann gilt

$$\|x\|_{\ell^p} = \sup_{N\in\mathbb{N}} \underbrace{\Big(\sup_{n=1,\ldots,N} |x_n|\Big)}_{=(\sup_n |x_n|^q)^{1/q}} \leq \sup_{N\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{n=1}^N |x_n|^q\Big)^{1/q} = \|x\|_{\ell^q}.$$

2. Fall: $p < \infty$: Sei hier zunächst $\|x\|_{\ell^q} = 1$. Dann ist auch $|x_n| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit $|x_n|^{p-q} \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit erhalten wir

$$\|x\|_{\ell^p}^p = \sum_{n\geq 1} |x_n|^p = \sum_{n\geq 1} |x_n|^q \underbrace{|x_n|^{p-q}}_{\leq 1} \leq \|x\|_{\ell^q}^q = 1.$$

Das heißt $\|x\|_{\ell^p} \leq 1$. Sei nun $x \in \ell^q$ beliebig und $y := \frac{1}{\|x\|_{\ell^q}} x \in \ell^q$. Dann ist $\|y\|_{\ell^q} = 1$ und nach dem ersten Schritt erhalten wir $\|y\|_{\ell^p} \leq 1$. Dies ist wegen der Homogenität der ℓ^p-Norm aber gerade äquivalent zu

$$\|x\|_{\ell^p} \leq \|x\|_{\ell^q}.$$