Aufgabe 4 **a)** Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $X := C_b(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{K} : f \text{ ist beschränkt und stetig}\}$ versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$, $m \in X$, und M der Multiplikationsoperator

$$M : X \to X, \quad Mf = mf.$$

Zeigen Sie, dass M ein wohldefinierter stetiger Operator ist mit $\|M\| = \|m\|_\infty$.

Lösungsvorschlag: Für $f \in X$ ist auch das Produkt mf stetig und wegen

$$\|mf\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |m(x)f(x)| \le \sup_{x\in\Omega} |m(x)| \sup_{x\in\Omega} |f(x)| = \|m\|_\infty \|f\|_\infty < \infty \tag{1}$$

ist auch mf beschränkt, d.h. $Mf \in X$ und somit M wohldefiniert. Offensichtlich ist $M : X \to X$ linear und wegen (1) auch beschränkt. Also ist $M \in B(X)$ mit $\|M\| \le \|m\|_\infty$ nach (1). Für die Umkehrung dieser Ungleichung betrachte die Funktion $f_0(x) = 1$ für $x \in \Omega$. Dann ist $f_0 \in X$ und wir erhalten

$$\|M\| = \sup_{\|f\|_\infty = 1} \|m \cdot f\|_\infty \ge \|m \cdot f_0\|_\infty = \|m\|_\infty.$$

Aufgabe 6 Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ auf dem zusätzlich eine Metrik d definiert sei. Zeigen Sie, dass es genau dann auf X eine Norm $\|\cdot\|$ mit $\|x-y\| = d(x,y)$ für alle $x, y \in X$ gibt, wenn d translationsinvariant und homogen ist, d.h. es gelten $d(x,y) = d(x+z, y+z)$ sowie $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x,y)$ für alle $x, y, z \in X$ und alle $\alpha \in \mathbb{K}$.

Lösungsvorschlag: Sei zunächst $\|\cdot\|$ eine Norm mit $d(x,y) = \|x-y\|$ für alle $x, y \in X$. Dann erhalten wir für $x, y, z \in X$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ aus den Eigenschaften der Norm

$$\begin{aligned} d(x+z, y+z) &= \|x+z-(y+z)\| = \|x-y\| = d(x,y), \\ d(\alpha x, \alpha y) &= \|\alpha x - \alpha y\| = |\alpha| \|x-y\| = |\alpha| d(x,y), \end{aligned}$$

d.h. d ist homogen und translationsinvariant.

Sei nun d homogen und translationsinvariant. Dann definieren wir die Abbildung

$$\|x\| := d(x, 0) \quad \text{für } x \in X.$$

Für $x, y \in X$ erhalten wir zum einen wegen der Translationsinvarianz

$$\|x-y\| = d(x-y, 0) = d(x-y+y, y) = d(x,y).$$

Und zum anderen gilt für alle $x, y \in X$ und $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} \|x\| = d(x,0) \ge 0 \quad \text{und} \quad \|x\| = d(x,0) = 0 &\overset{d \text{ ist Metrik}}{\iff} x = 0, \\ \|\alpha x\| = d(\alpha x, 0) &\overset{d \text{ homogen}}{=} |\alpha| d(x,0) = |\alpha| \|x\|, \\ \|x+y\| = d(x+y, 0) \le d(x+y, y) + d(y, 0) &\overset{d \text{ trans.inv.}}{=} d(x,0) + d(y,0) = \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

D.h. $\|\cdot\|$ ist eine Norm auf X mit der gewünschten Eigenschaft.