Aufgabe 7

a) Auf $\mathbb{R}^2$ definieren wir die Abbildung $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$d(x,y) := \begin{cases} |x-y|, & \text{falls } x = \lambda y \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R}, \\ |x|+|y|, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $|\cdot|$ die euklidische Norm in $\mathbb{R}^2$ bezeichne. Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ definiert und skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \colon d(x,(0,0)) = 1\}, \quad M_2 := \{x \in \mathbb{R}^2 \colon d(x,(1,1)) = 1\},$$
$$M_3 := \{x \in \mathbb{R}^2 \colon d(x,(1,1)) = 2\}.$$

b) Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und p_j, $j \in \mathbb{N}$, Halbnormen auf X mit der Eigenschaft, dass für jedes $x \in X \setminus \{0\}$ ein $k \in \mathbb{N}$ existiere mit $p_k(x) > 0$. Zeigen Sie, dass dann

$$d(x,y) := \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \frac{p_j(x-y)}{1+p_j(x-y)}, \qquad x,y \in X,$$

eine Metrik auf X definiert. Zeigen Sie außerdem, dass eine Folge $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq X$ genau dann gegen ein $x \in X$ bezüglich d konvergiert, falls $\lim_{n\to\infty} p_j(x_n - x) = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

Lösungsvorschlag: a) Seien $x,y,z \in \mathbb{R}^2$.

1) Positive Definitheit: Offensichtlich ist $d(x,y) \geq 0$ und $d(x,x) = 0$. Ist außerdem $x \neq y$, so folgt in jedem Fall $d(x,y) > 0$, woraus die Definitheit von d folgt.

2) Symmetrie: Da $|x-y| = |y-x|$ und $|x|+|y| = |y|+|x|$, gilt auch $d(x,y) = d(y,x)$.

3) Dreiecksungleichung: **Fall 1:** Es existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $x = \lambda y$.

Fall 1.1: Es existiert ein $\mu \in \mathbb{R}$ mit $x = \mu z$. Ist $\mu = 0$, so ist $x = 0$ und es gilt

$$d(x,y) = |y| \leq \left\{ \begin{array}{ll} |z|+|z-y|, & \text{falls } z = \nu y \text{ für ein } \nu \in \mathbb{R}, \\ |z|+|z|+|y|, & \text{sonst,} \end{array} \right\} = d(x,z) + d(z,y).$$

Ist $\mu \neq 0$, so folgt $z = \frac{\lambda}{\mu} y$ und damit

$$d(x,y) = |x-y| \leq |x-z| + |z-y| = d(x,z) + d(z,y).$$

Fall 1.2 Es existiert kein $\mu \in \mathbb{R}$ mit $x = \mu z$. Dann existiert auch kein $\nu \in \mathbb{R}$ mit $y = \nu z$. Damit folgt

$$d(x,y) = |x-y| \leq |x| + |y| \leq |x| + |z| + |z| + |y| = d(x,z) + d(z,y).$$

Fall 2: Es existiert kein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $x = \lambda y$.

Fall 2.1: Es existiet ein $\mu \in \mathbb{R}$ mit $x = \mu z$. Dann existiert auch kein $\nu \in \mathbb{R}$ mit $y = \nu z$. Daher erhalten wir

$$d(x,y) = |x| + |y| = |x - z + z| + |y| \leq |x-z| + |z| + |y| = d(x,z) + d(z,y).$$

Fall 2.2: Es existiert kein $\mu \in \mathbb{R}$ mit $x = \mu z$, aber es existiert ein $\nu \in \mathbb{R}$ mit $y = \nu z$. Dann gilt

$$d(x, y) = |x| + |y| = |x| + |z + y - z| \leq |x| + |z| + |y - z| = d(x, z) + d(z, y).$$

Fall 2.3: Es existiert kein $\mu \in \mathbb{R}$ mit $x = \mu z$ und kein $\nu \in \mathbb{R}$ mit $y = \nu z$. Hier erhalten wir

$$d(x, y) = |x| + |y| \leq |x| + |z| + |z| + |y| = d(x, z) + d(z, y).$$

Also ist d eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$. Betrachten wir schließlich noch die Mengen M_1, M_2 und M_3. Für M_1 erhalten wir

$$d(x, (0, 0)) = 1 \iff |x| = 1,$$

bzw. $M_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon |x| = 1\}$. D.h. der Einheitskreis bezüglich d ist gerade der Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$.

Ist $x \in M_2$ und $x = \lambda(1, 1) = (\lambda, \lambda)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so gilt

$$d(x, (1, 1)) = |(\lambda - 1, \lambda - 1)| = 1 \iff \lambda^2 - 2\lambda + \tfrac{1}{2} = 0 \iff \lambda = 1 \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Ist $x \neq (\lambda, \lambda)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so folgt

$$d(x, (1, 1)) = |(1, 1)| + |x| = 1 \iff |x| = 1 - \sqrt{2} < 0,$$

was nicht möglich ist. Daher ist $M_2 = \{(1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, 1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}), (1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, 1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2})\}$.

Für M_3 betrachten wir wieder zunächst $x \in \mathbb{R}^2$ mit $x = (\lambda, \lambda)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann erhalten wir ähnlich wie bei M_2

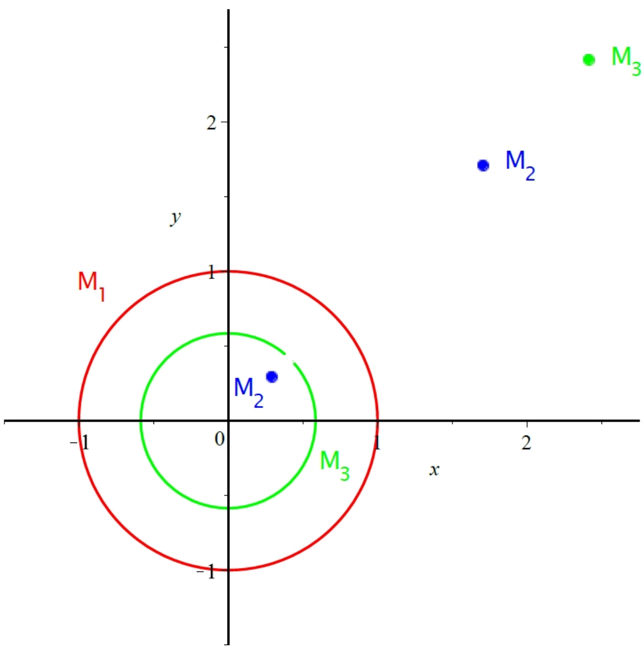
$$d(x, (1, 1)) = |(\lambda - 1, \lambda - 1)| = 2 \iff \lambda = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Für den Fall $x \neq (\lambda, \lambda)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$d(x, (1, 1)) = |(1, 1)| + |x| = 2 \iff |x| = 2 - \sqrt{2} > 0.$$

Hier müssen wir allerdings diejenigen Punkte ausschließen, für die ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert mit $|(\lambda, \lambda)| = 2 - \sqrt{2}$, d.h. $\lambda = \pm(\sqrt{2} - 1)$. Für M_3 erhalten wir also

$$M_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon |x| = 2 - \sqrt{2}\} \setminus \{(\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} - 1)\} \cup \{(1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})\}.$$



b) Wir definieren die Funktion $\varphi(t) := \frac{t}{1+t}$ für $t \geq 0$. Dann ist $\varphi(t) \in [0,1)$ und in t strikt monoton wachsend, da $\varphi'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0$.

1) Positive Definitheit: Mit obiger Bemerkung erhalten wir für $x, y \in X$

$$0 \leq d(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \frac{p_j(x-y)}{1+p_j(x-y)} \leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = 1.$$

Insbesondere konvergiert die Reihe für alle $x, y \in X$, d.h. $d\colon X \times X \to [0,\infty)$ ist wohldefiniert. Sei nun $x = y$. Dann ist $p_j(x-y) = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$, also $d(x,y) = 0$. Ist umgekehrt $d(x,y) = 0$, so ist $p_j(x-y) = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und damit $x = y$ nach Voraussetzung an die Halbnormen.

2) Symmetrie: Da $p_j(x-y) = p_j(y-x)$ für alle $j \in \mathbb{N}$, folgt direkt $d(x,y) = d(y,x)$ für $x, y \in X$.

3) Dreiecksungleichung: Da φ strikt monoton wachsend ist, erhalten wir für $j \in \mathbb{N}$ und $x, y, z \in X$

$$\begin{aligned}\frac{p_j(x-y)}{1+p_j(x-y)} &= \varphi\big(p_j(x-y)\big) \leq \varphi\big(p_j(x-z)+p_j(z-y)\big) = \frac{p_j(x-z)+p_j(z-y)}{1+p_j(x-z)+p_j(z-y)} \\ &\leq \frac{p_j(x-z)}{1+p_j(x-z)} + \frac{p_j(z-y)}{1+p_j(z-y)}.\end{aligned}$$

Damit folgt aber

$$d(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \frac{p_j(x-y)}{1+p_j(x-y)} \leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \Big(\frac{p_j(x-z)}{1+p_j(x-z)} + \frac{p_j(z-y)}{1+p_j(z-y)} \Big) = d(x,z) + d(z,y).$$

Also ist d eine Metrik auf X. Kommen wir schließlich zur Äquivalenz der Konvergenzen. Sei $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ und $j \in \mathbb{N}$ fixiert. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$2^{-j} \frac{p_j(x_n - x)}{1+p_j(x_n-x)} \leq d(x_n, x) \leq \varepsilon \quad \text{für } n \geq N_\varepsilon.$$

Wähle nun $\widetilde{\varepsilon} \in (0, \frac{1}{2})$ und $\varepsilon := 2^{-j}\widetilde{\varepsilon} > 0$. Dann existiert ein $N_{\varepsilon,j} \in \mathbb{N}$, sodass

$$p_j(x_n - x) \leq \widetilde{\varepsilon}\big(1 + p_j(x_n - x)\big) \leq \widetilde{\varepsilon} + \tfrac{1}{2} p_j(x_n - x) \quad \text{für } n \geq N_{\varepsilon,j}.$$

Damit folgt aber gerade, dass $p_j(x_n - x) \leq 2\widetilde{\varepsilon}$ für $n \geq N_{\varepsilon,j}$.

Sei umgekehrt $\lim_{n\to\infty} p_j(x_n - x) = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{j \geq N_\varepsilon + 1} 2^{-j} \leq \varepsilon$, und zu N_ε ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass

$$p_j(x_n - x) \leq \varepsilon \quad \text{für } n \geq n_\varepsilon \text{ und } j \in \{1, \ldots, N_\varepsilon\}.$$

Dann gilt aber gerade für $n \geq n_\varepsilon$

$$d(x_n, x) \leq \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} 2^{-j} \frac{p_j(x_n - x)}{1+p_j(x_n-x)} + \sum_{j \geq N_\varepsilon + 1} 2^{-j} \leq \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} 2^{-j}\varepsilon + \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

Aufgabe 9 Sei X ein normierter Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $x'\colon X \to \mathbb{K}$ linear. Zeigen Sie, dass der Kern von x' entweder abgeschlossen oder dicht in X ist.

Lösungsvorschlag: 1. Fall: x' ist stetig. Da $\{0\}$ abgeschlossen in $\mathbb{K}$ ist, ist auch Kern $x' = x'^{-1}(\{0\})$ abgeschlossen in X nach Proposition 4.13.

2. Fall: x' ist nicht stetig. Insbesondere ist dann $x' \neq 0$. Dann existieren $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq X$ und eine Folge $(a_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{K}$, sodass $x_n \to 0$ und $x'(x_n) = a_n \nrightarrow 0$ für $n \to \infty$. Sei ohne Einschränkung $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Setze dann $y_n := \frac{1}{a_n} x_n$, $n \in \mathbb{N}$. Dann erhalten wir eine Folge $(y_n)_{n\geq 1} \subseteq X$ mit

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0 \quad \text{und} \quad x'(y_n) = \frac{1}{a_n} x'(x_n) = 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Für $z \in X$ beliebig setzen wir schließlich $z_n := z - x'(z) y_n$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \quad \text{und} \quad x'(z_n) = x'(z) - x'(z)x'(y_n) = 0,$$

also ist $(z_n)_{n\geq 1} \subseteq \text{Kern } x'$ und somit $\overline{\text{Kern } x'} = X$.