Aufgabe 15

a) Sei $p \in [1,\infty)$. Zeigen Sie, dass eine Menge $K \subseteq \ell^p$ kompakt ist, falls sie abgeschlossen und beschränkt ist und falls

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{(x_n)\in K} \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^p = 0.$$

b) Zeigen Sie, dass eine Menge $K \subseteq c_0$ kompakt ist, falls sie abgeschlossen und beschränkt ist und falls

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{(x_n)\in K} \sup_{n\geq N+1} |x_n| = 0.$$

Lösungsvorschlag: a) Da ℓ^p ein Banachraum ist, genügt es zu zeigen, dass K totalbeschränkt ist. Sei dafür $\varepsilon > 0$. Dann existiert nach Voraussetzung ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sodass

$$\sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} |x_n|^p < \frac{\varepsilon^p}{2} \qquad \text{für alle } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K.$$

Für $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K$ definieren wir $\widetilde{x} := (x_1, \ldots, x_{N_\varepsilon}) \in \mathbb{K}^{N_\varepsilon}$. Da $\|\widetilde{x}\|_{\ell^p} \leq \|x\|_{\ell^p}$ und da K beschränkt ist, ist auch $K^{(N_\varepsilon)} := \{\widetilde{x} \colon x \in K\}$ beschränkt in $(\mathbb{K}^{N_\varepsilon}, \|\cdot\|_{\ell^p})$. Nach Heine-Borel ist damit $\overline{K^{(N_\varepsilon)}}$ kompakt, also insbesondere totalbeschränkt. Daher existieren $\widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_m \in \mathbb{K}^{N_\varepsilon}$ mit $\overline{K^{(N_\varepsilon)}} \subseteq \bigcup_{k=1}^m K(\widetilde{y}_k, \frac{\varepsilon}{2^{1/p}})$. Setze nun $y_k := \big((\widetilde{y}_k)_1, \ldots, (\widetilde{y}_k)_{N_\varepsilon}, 0, \ldots\big) \in \ell^p$ für $k \in \{1, \ldots, m\}$. Wir zeigen nun, dass $K \subseteq \bigcup_{k=1}^m K(y_k, \varepsilon)$. Sei dafür $x \in K$ fixiert. Dann existiert zu $\widetilde{x} \in K^{(N_\varepsilon)}$ ein $\ell \in \{1, \ldots, m\}$ mit $\|\widetilde{x} - \widetilde{y}_\ell\|_{\ell^p} < \frac{\varepsilon}{2^{1/p}}$. Damit erhalten wir schließlich

$$\|x - y_\ell\|_{\ell^p}^p = \|\widetilde{x} - \widetilde{y}_\ell\|_{\ell^p}^p + \sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} |x_n|^p < \varepsilon^p.$$

b) Der Beweis geht völlig analog zu Teil a). Der Vollständigkeit halber führen wir den Beweis hier vor.

Da c_0 ein Banachraum ist, genügt es zu zeigen, dass K totalbeschränkt ist. Sei dafür $\varepsilon > 0$. Dann existiert nach Voraussetzung ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sodass

$$\sup_{n\geq N_\varepsilon+1} |x_n| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für alle } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K.$$

Für $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K$ definieren wir $\widetilde{x} := (x_1, \ldots, x_{N_\varepsilon}) \in \mathbb{K}^{N_\varepsilon}$. Da $\|\widetilde{x}\|_\infty \leq \|x\|_\infty$ und da K beschränkt ist, ist auch $K^{(N_\varepsilon)} := \{\widetilde{x} \colon x \in K\}$ beschränkt in $(\mathbb{K}^{N_\varepsilon}, \|\cdot\|_\infty)$. Nach Heine-Borel ist damit $\overline{K^{(N_\varepsilon)}}$ kompakt, also insbesondere totalbeschränkt. Daher existieren $\widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_m \in \mathbb{K}^{N_\varepsilon}$ mit $\overline{K^{(N_\varepsilon)}} \subseteq \bigcup_{k=1}^m K(\widetilde{y}_k, \frac{\varepsilon}{2})$. Setze nun $y_k := \big((\widetilde{y}_k)_1, \ldots, (\widetilde{y}_k)_{N_\varepsilon}, 0, \ldots\big) \in c_0$ für $k \in \{1, \ldots, m\}$. Wir zeigen nun, dass $K \subseteq \bigcup_{k=1}^m K(y_k, \varepsilon)$. Sei dafür $x \in K$ fixiert. Dann existiert zu $\widetilde{x} \in K^{(N_\varepsilon)}$ ein $\ell \in \{1, \ldots, m\}$ mit $\|\widetilde{x} - \widetilde{y}_\ell\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Damit erhalten wir schließlich

$$\|x - y_\ell\|_\infty \leq \|\widetilde{x} - \widetilde{y}_\ell\|_\infty + \sup_{n\geq N_\varepsilon+1} |x_n| < \varepsilon.$$