Aufgabe 22 Sei X ein Banachraum, $A\colon D(A) \subseteq X \to X$ ein abgeschlossener und $B\colon D(B) \subseteq X \to X$ ein linearer Operator auf X. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Der Kern von A ist abgeschlossen in X.

b) Ist $B\colon D(B) \to X$ bijektiv und B^{-1} stetig, so ist der Operator $C = BA$ mit $D(C) = \{x \in D(A)\colon Ax \in D(B)\}$ abgeschlossen.

c) Sei $D(A) = D(B)$ und $\|Bx\| \leq a\|Ax\| + b\|x\|$ für Konstanten $a \in [0,1)$, $b \geq 0$ und alle $x \in D(A)$. Dann ist der Operator $C = A + B$ mit $D(C) = D(A)$ abgeschlossen.

Lösungsvorschlag: a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \text{Kern } A$ eine beliebige Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ für ein $x \in X$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{Ax_n}_{=0} = 0.$$

Aus der Abgeschlossenheit von A folgt dann

$$x \in D(A) \quad \text{und} \quad Ax = 0,$$

d.h. $x \in \text{Kern } A$.

b) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(C)$, $x, y \in X$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} Cx_n = y$. Dann gilt wegen der Bijektivität von B für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$Ax_n = B^{-1}BAx_n = B^{-1}Cx_n,$$

und die Stetigkeit von B^{-1} impliziert $\lim_{n\to\infty} Ax_n = B^{-1}y$. Aus der Abgeschlossenheit von A erhalten wir dann $x \in D(A)$ und $Ax = B^{-1}y \in D(B)$. Dies heißt aber gerade $x \in D(C)$ und $Cx = BAx = y$.

c) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(C) = D(A)$, $x, y \in X$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} Cx_n = y$. Dann erhalten wir nach Voraussetzung

$$\begin{aligned}\|Bx_n - Bx_m\| &\leq a\|Ax_n - Ax_m\| + b\|x_n - x_m\| \\ &\leq a\|Cx_n - Cx_m\| + a\|Bx_n - Bx_m\| + b\|x_n - x_m\|,\end{aligned}$$

und nach Umformung

$$\|Bx_n - Bx_m\| \leq \frac{a}{1-a}\|Cx_n - Cx_m\| + \frac{b}{1-a}\|x_n - x_m\|,$$

d.h. $(Bx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein Cauchy-Folge. Da X ein Banachraum ist, existiert ein $z \in X$ mit $\lim_{n\to\infty} Bx_n = z$. Damit folgt aber

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} Cx_n - Bx_n = y - z \in X.$$

Aus der Abgeschlossenheit von A erhalten wir schließlich $x \in D(A) = D(B) = D(C)$ und $Ax = y - z$. Hieraus folgt auch

$$\|z - Bx\| \leq \|z - Bx_n\| + \|Bx_n - Bx\| \leq \|z - Bx_n\| + a\|Ax_n - Ax\| + b\|x_n - x\| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

d.h. $Bx = z$ bzw. $Cx = Ax + Bx = y - z + z = y$.

Aufgabe 23 Wir betrachten den Banachraum $X = C_b(\mathbb{R})$ versehen mit der Supremumsnorm sowie

$$C_b^2(\mathbb{R}) := \{f \in C^2(\mathbb{R})\colon f, f', f'' \in X\}.$$

Zeigen Sie:

a) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $C_\varepsilon > 0$ mit

$$\|f'\|_\infty \le \varepsilon \|f''\|_\infty + C_\varepsilon \|f\|_\infty \qquad \text{für alle } f \in C_b^2(\mathbb{R}).$$

b) Der Operator $Af = f''$ mit $D(A) = C_b^2(\mathbb{R})$ ist abgeschlossen.

Lösungsvorschlag: a) Für jedes $\varepsilon > 0$ erhalten wir nach der Taylorentwicklung

$$f(x + 2\varepsilon) = f(x) + 2\varepsilon f'(x) + \tfrac{(2\varepsilon)^2}{2!} f''(\xi)$$

für ein $\xi \in [x, x + 2\varepsilon]$. Hieraus folgt aber

$$\|f'\|_\infty \le \tfrac{1}{2\varepsilon}\big(2\|f\|_\infty + 2\varepsilon^2 \|f''\|_\infty\big) = \varepsilon \|f''\|_\infty + \tfrac{1}{\varepsilon}\|f\|_\infty.$$

Also folgt mit $C_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$ die Behauptung.

b) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(A)$ und $f, g \in X$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ und $\lim_{n\to\infty} Af_n = g$ in X. Nach Aufgabenteil a) ist dann aber $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X, d.h. es existiert ein $h \in X$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n' = h$. Aus der Abgeschlossenheit der ersten Ableitung folgt hieraus aber gerade $f \in C_b^1(\mathbb{R})$ mit $h = f'$. Eine erneute Anwendung dieser Abgeschlossenheit liefert dann $f \in C_b^2(\mathbb{R})$ und $Af = g$, d.h. A ist abgeschlossen.