Aufgabe 31 Sei H ein Hilbertraum, $A \subseteq H$ und U, V abgeschlossene Unterräume von H. Zeigen Sie:

a) $(A^\perp)^\perp = \overline{\operatorname{lin} A}$.

b) $U \cap V = (U^\perp + V^\perp)^\perp$.

c) $U + V$ ist abgeschlossen in H genau dann, wenn $U + V = (U^\perp \cap V^\perp)^\perp$.

Lösungsvorschlag: a) Per Definition ist $A \subseteq (A^\perp)^\perp$. Nach einem Beispiel aus Übung 11 ist nun $(A^\perp)^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum von H, also erhalten wir

$$\overline{\operatorname{lin} A} \subseteq \overline{\operatorname{lin}(A^\perp)^\perp} = (A^\perp)^\perp.$$

Für die andere Richtung verwenden wir das Resultat $A^\perp = (\overline{\operatorname{lin} A})^\perp$, das wir ebenfalls in Übung 11 bewiesen haben. Damit erhalten wir $H = \overline{\operatorname{lin} A} \oplus A^\perp$. Für $x \in (A^\perp)^\perp$ existiert also ein $y \in A^\perp$ und ein $z \in \overline{\operatorname{lin} A}$ mit $x = y + z$. Dann ist auch $y = x - z \in (A^\perp)^\perp$, d.h. $y \in A^\perp \cap (A^\perp)^\perp$ und damit $y = 0$. Dies heißt aber gerade, dass $x = z \in \overline{\operatorname{lin} A}$.

b) Für $x \in H$ gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} x \in U \cap V &\overset{a)}{\iff} x \in (U^\perp)^\perp \cap (V^\perp)^\perp \iff \langle x, y\rangle = 0 \quad \forall\, y \in U^\perp \text{ und } \forall\, y \in V^\perp \\ &\iff \langle x, y\rangle = 0 \quad \forall\, y \in U^\perp + V^\perp \iff x \in (U^\perp + V^\perp)^\perp. \end{aligned}$$

c) Ist $U + V$ abgeschlossen, so gilt mit Teil a) und Übung 11

$$U + V = \overline{\operatorname{lin}(U + V)} = \big((U + V)^\perp\big)^\perp = (U^\perp \cap V^\perp)^\perp.$$

Für die andere Richtung verwenden wir, dass $(U^\perp \cap V^\perp)^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum von H ist, also ist auch $U + V$ abgeschlossen.

Aufgabe 33 Für $\lambda \in \mathbb{R}$ definieren wir die Funktion $f_\lambda \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f_\lambda(t) = e^{i\lambda t}$ und $X = \operatorname{lin}\{f_\lambda \colon \lambda \in \mathbb{R}\}$. Zeigen Sie:

a) Für $f, g \in X$ existiert der Grenzwert $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$.

b) Die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \colon X \times X \to \mathbb{K}, \quad \langle f, g\rangle := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$$

definiert ein Skalarprodukt auf X.

c) Die Vervollständigung $AP_2(\mathbb{R})$ von X bezüglich der Norm $\|\cdot\| := \sqrt{\langle \cdot, \cdot\rangle}$ ist nicht separabel.

Lösungsvorschlag: a) Seien zunächst $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f_{\lambda_1}(t)\overline{f_{\lambda_2}(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{i\lambda_1 t} e^{-i\lambda_1 t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} 1\,\mathrm{d}t = 1.$$

Für $\lambda_1 \neq \lambda_2$ erhalten wir

$$\frac{1}{2T}\Big|\int_{-T}^{T} f_{\lambda_1}(t)\overline{f_{\lambda_2}(t)}\,\mathrm{d}t\Big| = \frac{1}{2T}\Big|\int_{-T}^{T} e^{i(\lambda_1-\lambda_2)t}\,\mathrm{d}t\Big| = \frac{1}{2T|\lambda_1-\lambda_2|}\big|e^{i(\lambda_1-\lambda_2)T} - e^{-i(\lambda_1-\lambda_2)T}\big|$$
$$\leq \frac{1}{T|\lambda_1-\lambda_2|} \to 0 \quad \text{für } T \to \infty.$$

Für $f = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n f_{\lambda_n}$, $g = \sum_{m=1}^{M} \beta_m f_{\mu_m} \in X$ gilt dann

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t = \sum_{n,m} \alpha_n\overline{\beta_m}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f_{\lambda_n}(t)\overline{f_{\mu_m}(t)}\,\mathrm{d}t \overset{T\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{\lambda_n=\mu_m} \alpha_n\overline{\beta_m} \in \mathbb{K}.$$

b) Die Wohldefiniertheit der Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle$ folgt aus Aufgabenteil a), und die Sesquilinearität ist hier trivial. Wir zeigen noch die positive Definitheit. Für $f = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n f_{\lambda_n}$ gilt nach a)

$$\langle f, f\rangle = \sum_{n=1}^{N} |\alpha_n|^2 \geq 0 \quad \text{und}$$
$$\langle f, f\rangle = 0 \iff \alpha_n = 0 \quad \forall\, n = 1,\dots,N \iff f = 0.$$

c) Für $\lambda_1 \neq \lambda_2$ erhalten wir nach a)

$$\|f_{\lambda_1} - f_{\lambda_2}\|^2 = \langle f_{\lambda_1}, f_{\lambda_1}\rangle - \langle f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2}\rangle - \langle f_{\lambda_2}, f_{\lambda_1}\rangle + \langle f_{\lambda_2}, f_{\lambda_2}\rangle = 2,$$

d.h. $\|f_{\lambda_1} - f_{\lambda_2}\| = \sqrt{2}$. Die Menge $D := \{f_\lambda\colon \lambda \in \mathbb{R}\}$ ist überabzählbar mit $D \subseteq AP_2(\mathbb{R})$. Wie im Beweis der Nicht-Separabilität von ℓ^∞ folgt nun auch hier, dass $AP_2(\mathbb{R})$ nicht separabel ist.