**Aufgabe 37**

a) Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $k \in L^2(\Omega \times \Omega)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $g \in L^2(\Omega)$. Dann betrachten wir die Gleichung

$$\lambda f(x) - \int_\Omega k(x,y) f(y) \,\mathrm{d}y = g(x), \quad x \in \Omega. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass dann eine der folgenden beiden Alternativen gilt:

A) Die Gleichung $\int_\Omega k(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y = \lambda f(x)$, $x \in \Omega$, hat nur die triviale Lösung. Dann hat (1) für jedes $g \in L^2(\Omega)$ genau eine Lösung $f \in L^2(\Omega)$.

B) Die Gleichung $\int_\Omega k(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y = \lambda f(x)$, $x \in \Omega$, hat einen $n$-dimensionalen Lösungsraum für ein $n \in \mathbb{N}$. In diesem Fall existieren $h_1, \dots, h_n \in L^2(\Omega)$, sodass (1) genau dann eine Lösung besitzt, falls $\langle g, h_k \rangle_{L^2} = 0$ für $k = 1, \dots, n$.

b) Für $f \in L^2(0, \infty)$ definieren wir den Operator

$$Tf(x) := \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Zeigen Sie, dass $T \colon L^2(0,\infty) \to L^2(0,\infty)$ stetig, aber nicht kompakt ist.

**Lösungsvorschlag:** Wir zeigen zunächst eine einfache Hilfsbehauptung: Sei $X$ ein Banachraum und $Y, Z$ abgeschlossene Unterräume von $X$ mit $X = Y \oplus Z$. Dann sind ${}^{X}\!/_{Y}$ und $Z$ isomorph.

Wir definieren die Abbildung $J \colon Z \to {}^{X}\!/_{Y}$ durch $J(z) = \hat{z} = z + Y$. Dann ist $J$ linear und wegen

$$\|J(z)\| = \|z + Y\| = \inf_{y \in Y} \|z - y\| \le \|z\|$$

auch stetig. Sei nun $z \in Z$ mit $J(z) = 0$. Dann ist $z \in Y$ und damit $z = 0$ (da $Y \cap Z = \{0\}$). Also ist $J$ injektiv. Sei umgekehrt $\hat{x} = x + Y \in {}^{X}\!/_{Y}$. Dann existieren $y \in Y$ und $z \in Z$ mit $x = y + z$. Dann ist aber $\hat{x} = \hat{z}$ und damit $J(z) = \hat{z} = \hat{x}$. Also ist $J$ surjektiv. Aus dem Satz von der offenen Abbildung folgt nun die Behauptung.

**a)** Wir definieren für $f \in L^2(\Omega)$ den Operator

$$K \colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega), \quad Kf(x) := \int_\Omega k(x,y) f(y)\,\mathrm{d}\mu, \quad x \in \Omega.$$

Wegen $k \in L^2(\Omega \times \Omega)$ ist dann $K$ ein wohldefinierter, linearer und kompakter Operator auf $L^2(\Omega)$. Nach Vorlesung (Satz 14.3) liegt jedes $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ entweder in der Resolventenmenge (Fall A)) oder ist ein Eigenwert (Fall B)). Im Fall A) besitzt die Gleichung $Kf = \lambda f$ nur die triviale Lösung und die Gleichung $\lambda f - Kf = g$ besitzt die eindeutige Lösung $f = R(\lambda, K)g$ für jedes $g \in L^2(\Omega)$.

Im Fall B) ist der Eigenraum endlichdimensional, d.h. es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ sodass $n = \dim\big(\mathrm{Kern}(\lambda - K)\big)$. Wir wollen nun zeigen, dass

$$\dim\big(\mathrm{Kern}(\lambda - K)\big) = \dim\big(\mathrm{Kern}(\lambda - K^*)\big) = n.$$

Nach Satz 14.1 ist $\mathrm{Bild}(I - \frac{1}{\lambda}K)$ abgeschlossen, da $\frac{1}{\lambda}K$ ebenfalls kompakt ist. Nach Satz 16.3 gilt dann $L^2(\Omega) = \mathrm{Bild}(I - \frac{1}{\lambda}K) \oplus \mathrm{Bild}(I - \frac{1}{\lambda}K)^\perp$ und mit obiger Hilfsbehauptung und Korollar 19.3 folgt

$$\mathrm{Kern}(I - \tfrac{1}{\lambda}K^*) \overset{19.3}{=} \big(\mathrm{Bild}(I - \tfrac{1}{\lambda}K)\big)^\perp \simeq {}^{L^2(\Omega)}\!/_{\mathrm{Bild}(I - \frac{1}{\lambda}K)}.$$

Darum erhalten wir nach Satz 14.1

$$\dim\big(\mathrm{Kern}(I - \tfrac{1}{\lambda}K^*)\big) = \dim\Big(L^2(\Omega)/\mathrm{Bild}(I - \tfrac{1}{\lambda}K)\Big) = \dim\big(\mathrm{Kern}(I - \tfrac{1}{\lambda}K)\big) = n.$$

Wir wählen nun eine Basis $h_1, \dots, h_n \in \mathrm{Kern}(I - \frac{1}{\lambda}K^*) = \mathrm{Kern}(\lambda - K^*)$ und bemerken, dass nach Korollar 19.3 und Aufgabe 31

$$\mathrm{Bild}(\lambda - K) = \big(\mathrm{Kern}(\lambda - K^*)\big)^{\perp}.$$

Dann besitzt die Gleichung $\lambda f - Kf = g$ genau dann eine Lösung, falls $g \in \mathrm{Bild}(\lambda - K) = \big(\mathrm{Kern}(\lambda - K^*)\big)^{\perp}$, d.h. genau dann, wenn $\langle g, h_k \rangle = 0$ für $k \in \{1, \dots, n\}$.

**b)** Wir definieren $k\colon (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch $k(x,y) = \frac{1}{x}\mathbb{1}_{(0,x)}(y)$. Dann ist

$$Tf(x) = \int_0^\infty k(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y,$$

und es gilt für jedes $\lambda > 0$

$$k(\lambda x, \lambda y) = \tfrac{1}{\lambda x}\mathbb{1}_{(0,\lambda x)}(\lambda y) = \tfrac{1}{\lambda x}\mathbb{1}_{(0,x)}(y) = \tfrac{1}{\lambda}k(x,y), \quad x, y \in (0,\infty),$$

d.h. $k$ ist homogen vom Grad $-1$. Außerdem erhalten wir

$$A_k = \int_0^\infty k(1,y) y^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 y^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}y = 2 < \infty.$$

Nach Aufgabe 5 b) definiert somit $T$ einen stetigen Operator auf $L^2(0,\infty)$.

Wir zeigen noch, dass $T$ nicht kompakt ist. Hierfür zeigen wir zwei Aussagen für $\lambda = 2$:
1) Für jedes $x \in (0,\infty)$ gilt

$$Tf(x) = 2f(x) \iff \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y = 2xf(x).$$

Da die linke Seite in $x$ stetig ist, können wir annehmen, dass ein Eigenvektor zum Wert 2 (sofern er existiert) stetig ist. Damit wiederum ist $f$ sogar stetig differenzierbar (usw.). Ableiten führt uns nun auf die Gleichung

$$f(x) = 2f(x) + 2xf'(x) \iff f'(x) = -\frac{1}{2x}f(x) \iff f(x) = cx^{-\frac{1}{2}}$$

für ein $c \in \mathbb{R}$. Nun ist aber $x \mapsto cx^{-\frac{1}{2}} \in L^2(0,\infty)$ genau dann, wenn $c = 0$. D.h. $(2-T)f = 0$ hat nur die triviale Lösung.

2) Wir definieren für $\alpha < \frac{1}{2}$ die Funktion $f_\alpha(x) := \mathbb{1}_{(0,1)}(x)\sqrt{1-2\alpha}\,x^{-\alpha}$. Dann liefert eine kurze Rechnung $\|f_\alpha\|_{L^2} = 1$ und

$$(2-T)f_\alpha(x) = (2 - \tfrac{1}{1-\alpha})f_\alpha(x) - \tfrac{\sqrt{1-2\alpha}}{1-\alpha}\mathbb{1}_{[1,\infty)}(x)\tfrac{1}{x}.$$

Damit folgt

$$\|(2-T)f_\alpha\|_{L^2}^2 = \big(2 - \tfrac{1}{1-\alpha}\big) + \tfrac{1-2\alpha}{(1-\alpha)^2} \to 0, \quad \alpha \to \tfrac{1}{2}.$$

Wenn wir nun annehmen, dass $(2-T)$ eine beschränkte Inverse $L$ hat, so gilt

$$\|f\|_{L^2} \le \|L\|\|(2-T)f\|_{L^2} \quad \text{für alle } f \in L^2(0,\infty).$$

Insbesondere erhalten wir $\|(2-T)f_\alpha\|_{L^2} \geq \frac{1}{\|L\|}\|f_\alpha\|_{L^2} = \frac{1}{\|L\|}$, was ein Widerspruch zu obiger Konvergenz ist.

Schritt 1) besagt nun, dass $\lambda = 2$ kein Eigenwert ist, und Schritt 2) besagt, dass $\lambda = 2$ auch nicht in der Resolventenmenge liegt. Wäre nun $T$ kompakt, so müsste nach der Fredholmschen Alternative allerdings genau einer dieser beiden Fälle eintreten. Also kann $T$ nicht kompakt sein.

**Aufgabe 38** Sei $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $2\pi$-periodisch und $h|_{[0,2\pi]} \in L^2[0,2\pi]$. Dann betrachen wir den Faltungsoperator

$$T\colon L^2[0,2\pi] \to L^2[0,2\pi], \quad Tf(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s.$$

a) Zeigen Sie, dass $T$ wohldefiniert, normal und kompakt ist.

b) Benutzen Sie die Fourierreihe von $h$, um die Eigenwerte und Eigenvektoren von $T$ zu bestimmen.

c) Bestimmen Sie die Spektralzerlegung von $T$.

**Lösungsvorschlag: a)** Wir definieren $k\colon [0,2\pi]\times[0,2\pi] \to \mathbb{C}$ durch $k(s,t) = \frac{1}{2\pi}h(t-s)$. Dann ist $k$ ein $L^2$-Kern, denn wegen der Periodizität von $h$ gilt $\|h(t-\cdot)\|_{L^2[0,2\pi]} = \|h\|_{L^2[0,2\pi]}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und damit

$$\begin{aligned}\|k\|^2_{L^2([0,2\pi]\times[0,2\pi])} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}|h(t-s)|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\|h(t-\cdot)\|^2_{L^2[0,2\pi]}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\|h\|^2_{L^2[0,2\pi]}\,\mathrm{d}t = \|h\|^2_{L^2[0,2\pi]} < \infty.\end{aligned}$$

Also ist $T$ nach Übung ein wohldefinierter kompakter Operator auf $L^2[0,2\pi]$. Nach Vorlesung ist der adjungierte Operator $T^*$ gegeben durch

$$T^*f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{k(t,s)}f(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{h(s-t)}f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Wir bemerken zunächst, dass für $s,t \in [0,2\pi]$ die folgende Identität gilt

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} h(t-s)\overline{h(s-r)}\,\mathrm{d}s &= \int_{t+r}^{2\pi+t+r} h(t-s)\overline{h(s-r)}\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} h(s-r-2\pi)\overline{h(t-s+2\pi)}\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^{2\pi} h(s-r)\overline{h(t-s)}\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

wobei wir die Periodizität von $h$ und in der zweiten Gleichheit die Substitution $\widetilde{s} = t+r-s+2\pi$ benutzt haben. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}(T^*Tf)(t) &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s-r)\overline{h(s-t)}f(r)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t-s)\overline{h(s-r)}f(r)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s = (TT^*f)(t),\end{aligned}$$

also ist $T$ normal.

**b)** Da $h|_{[0,2\pi]} \in L^2[0,2\pi]$, stimmt die Fourierreihe von $h$ mit $h$ fast überall überein, d.h. $h(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{h}(n)e^{int}$ für fast alle $t \in [0,2\pi]$, wobei

$$\hat{h}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s)e^{-ins}\,\mathrm{d}s = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle h, \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ins}\rangle_{L^2}.$$

Dann haben wir für $T$ die folgende Darstellung

$$\begin{aligned} Tf(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{h}(n)e^{in(t-s)}\,\mathrm{d}s = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{h}(n)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)e^{-ins}\,\mathrm{d}s\, e^{int} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{h}(n)\hat{f}(n)e^{int}. \end{aligned}$$

Sei nun $Tf = \lambda f$ für ein $f \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{h}(n)\hat{f}(n)e^{int} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda\hat{f}(n)e^{int} &\iff \hat{h}(n)\hat{f}(n) = \lambda\hat{f}(n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} \\ &\iff \big(\lambda - \hat{h}(n)\big)\hat{f}(n) = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn eine der drei folgenden Bedingungen erfüllt sind

1) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\hat{f}(n) = 0$,

2) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\lambda = \hat{h}(n)$,

3) es existieren $n \in \mathbb{N}$ mit $\lambda = \hat{h}(n)$ und $\hat{f}(m) = 0$ für alle anderen $m \in \mathbb{N}$.

Im ersten Fall wäre $f = 0$, also $f$ kein Eigenvektor. Dieser Fall kann also nicht vorkommen. Im zweiten Fall machen wir eine Fallunterscheidung: Ist $\lambda = 0$, so ist $h = 0$ und damit $T = 0$, d.h. $\lambda = 0$ wäre ein Eigenwert mit Eigenraum $L^2[0,2\pi]$. Ist $h \neq 0$ kann dieser Fall allerdings auch nicht auftreten.
Für $\lambda \neq 0$ erhalten wir mit Parseval (beachte, dass $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}, n \in \mathbb{Z}\}$ eine Orthonormalbasis von $L^2[0,2\pi]$ ist)

$$\|h\|_{L^2}^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\big|\langle h, \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}\rangle\big|^2 = 2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{h}(n)|^2 = 2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda^2 = \infty,$$

d.h. auch dieser Fall kann nicht auftreten.
Im letzten (und für $h \neq 0$ einzig möglichen) Fall ist dann $\lambda = \hat{h}(n)$ ein Eigenwert mit Eigenvektor $f(t) = e^{int}$. Ebenso wären auch alle $e^{imt}$ Eigenvektoren, für die $\lambda = \hat{h}(n) = \hat{h}(m)$ gilt. Demnach erhalten wir als Ergebnis:

$$\begin{aligned} &\text{Menge der Eigenwerte} = \{\hat{h}(n)\colon n \in \mathbb{Z}\} \\ &\quad\text{mit Eigenraum} \quad E_\lambda = \operatorname{lin}\{e^{int}\colon \lambda = \hat{h}(n)\} \quad \text{für jeden Eigenwert } \lambda. \end{aligned}$$

**c)** Nach Obigem haben wir für $e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$, die folgende Spektralzerlegung (siehe auch Spektralsatz für normale und kompakte Operatoren)

$$Tf = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{h}(n)\langle f, e_n\rangle e_n.$$